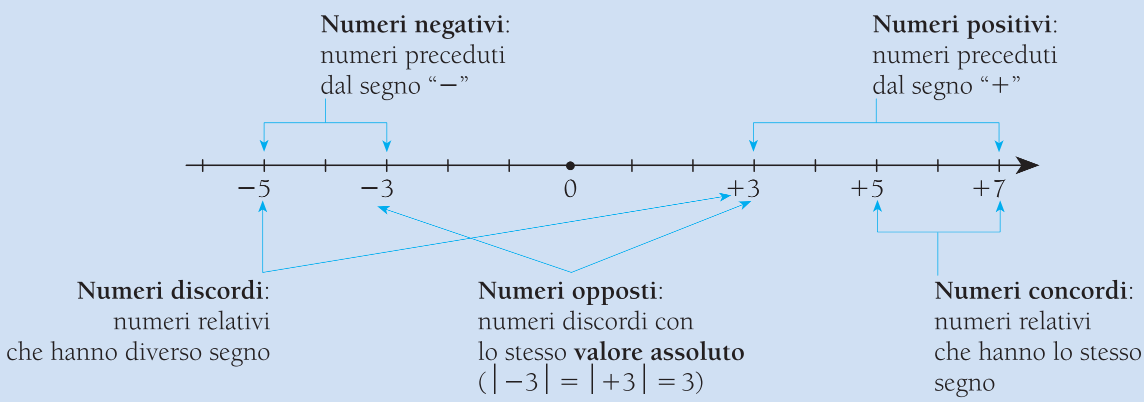
MAPPA 13

I numeri relativi sulla retta orientata

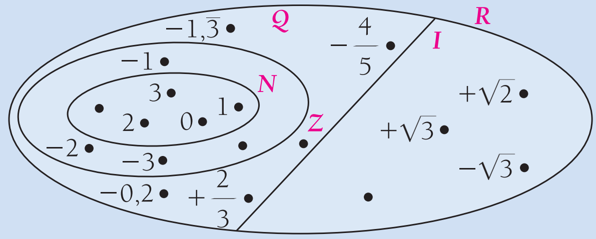


Confronto fra numeri relativi

Numeri discordi	Numeri positivi	Numeri negativi
Tra due numeri discordi è sempre maggiore quello **positivo**. *Esempio:* $+3 > -5$	Tra due numeri positivi è maggiore quello che ha **valore assoluto maggiore**. *Esempio:* $+5 > +3$	Tra due numeri negativi è maggiore quello che ha **valore assoluto minore**. *Esempio:* $-3 > -5$

Gli insiemi Z, Q e R

	Esempi	
L'insieme Z dei numeri interi	$0,\ +1,\ +3 \in Z^+$ $-1,\ -3 \in Z^-$	$Z = Z^+ \cup Z^-$
L'insieme Q dei numeri razionali	$+0{,}2,\ +\frac{1}{2},\ +\frac{2}{3},\ +\frac{4}{4} \in Q^+$ $-\frac{3}{7},\ -\frac{2}{2},\ -1{,}9,\ -\frac{5}{2} \in Q^-$	$Q = Q^+ \cup Q^-$
L'insieme I dei numeri irrazionali	$+\sqrt{2},\ +\sqrt{3},\ +\sqrt[3]{5} \in I^+$ $-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt[3]{5} \in I^-$	$I = I^+ \cup I^-$
L'insieme R dei numeri reali	$0,\ +2\sqrt{3},\ +3{,}4,\ +\sqrt{2},\ +4 \in R^+$ $-1,\ -\sqrt{3},\ -1{,}9, \in R^-$	$R = R^+ \cup R^-$



Le operazioni con i numeri relativi

Addizione fra numeri relativi

- La somma di due numeri relativi **concordi** è un numero relativo concorde con gli addendi che ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti.

  Esempio:

  $(+6) + (+11) = +17$ si può anche scrivere: $+6 + 11 = +17$

  stesso segno

  $(-4) + (-2) = -6$ si può anche scrivere: $-4 - 2 = -6$

- La somma di due numeri relativi **discordi** è un numero relativo che ha:
  il segno dell'addendo con valore assoluto maggiore;
  valore assoluto uguale alla differenza dei valori assoluti dei due addendi.

  Esempio:

  $(+5) + (-13) = -8$

  segno opposto $(13 - 5)$

- La somma di due numeri relativi **opposti** è uguale a zero.
  Esempio:
  $+7 + (-7) = 0$

Sottrazione fra numeri relativi

La differenza di due numeri relativi è il numero che si ottiene **addizionando** al primo l'**opposto** del secondo.

Esempio:

opposti

$(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7$

sottrazione addizione

Addizione algebrica
Nell'insieme Z l'addizione e la sottrazione costituiscono un'unica operazione detta **addizione algebrica** (il cui risultato è detto somma algebrica).
L'addizione algebrica gode delle stesse proprietà dell'addizione.

Moltiplicazione di numeri relativi

Il prodotto di due numeri relativi è il numero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori. È positivo se i due numeri sono concordi, negativo se i due numeri sono discordi.

La regola dei segni

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Esempi:

$(+5) \times (+7) = +35$ $\quad$ $(-5) \times (-7) = +35$

$(+5) \times (-7) = -35$ $\quad$ $(-5) \times (+7) = -35$

Inverso (o reciproco) di un numero relativo

Due numeri sono uno l'inverso dell'altro se il loro **prodotto è uguale a 1**.

Esempio: $-\frac{4}{3}$ è inverso di $-\frac{3}{4}$, infatti:

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 1$$

Divisione di numeri relativi

Il quoziente di due numeri relativi è un numero relativo che ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti dei numeri dati. È positivo se i numeri sono concordi, negativo se i numeri sono discordi.

La regola dei segni

:	+	−
+	+	−
−	−	+

Esempi:

$(+15) : (+5) = +3$ $\quad$ $(-15) : (-5) = +3$

$(+15) : (-5) = -3$ $\quad$ $(-15) : (+5) = -3$

Casi particolari

In una divisione tra due numeri relativi:

- se dividendo e divisore sono **uguali** allora il quoziente è **+1**;

  Esempi:

  $(-5) : (-5) = +1$ $\quad$ $(+9) : (+9) = +1$

- se il divisore è **+1** allora il quoziente è uguale al **dividendo**;

  Esempi:

  $(+10) : (+1) = +10$ $\quad$ $(-10) : (+1) = -10$

- se il divisore è **−1** allora il quoziente è uguale all'**opposto del dividendo**;

  Esempi:

  $(+10) : (-1) = -10$ $\quad$ $(-10) : (-1) = +10$

- se il dividendo è **0** allora il quoziente è uguale a **0**;

  Esempio:

  $0 : (-3) = 0$

- se il divisore è **0** allora la divisione è **impossibile**;

  Esempio:

  $(-2) : 0 =$ impossibile

- se dividendo e divisore sono **0** *allora* la divisione è **indeterminata**.

  Esempio:

  $0 : 0 =$ indeterminato

L'elevamento a potenza

La potenza di un numero relativo è un numero relativo avente per valore assoluto la potenza del valore assoluto della base. Il segno è negativo quando la base è negativa e l'esponente è dispari, positivo in tutti gli altri casi.

	Esponente pari	**Esponente dispari**
Base positiva	$+$	$+$
Base negativa	$+$	$-$

Esempi:

$(+3)^2 = +9$ $\quad$ $(+3)^3 = +27$

$(-3)^2 = +9$ $\quad$ $(-3)^3 = -27$

Casi particolari

In un elevamento a potenza:

- se l'**esponente è 0** la potenza è sempre uguale a $+1$;
- se la **base è 0** e l'**esponente è diverso da 0** allora la potenza è uguale a **0**;
- la scrittura 0^0 non ha significato.

Potenze con esponente intero negativo

La potenza di un numero relativo diverso da zero con esponente intero negativo è una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore la potenza stessa con l'esponente intero positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esempi:

numeratore 1

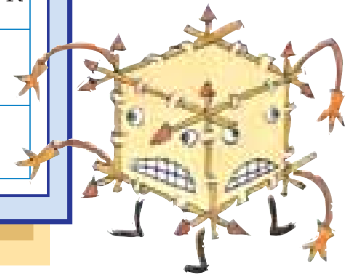
$$(+3)^{-3} = \frac{1}{(+3)^3} = +\frac{1}{27} \qquad (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27} \qquad \left(+\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(+\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\left(+\frac{1}{8}\right)} = +8$$

esponente negativo $\quad$ esponente negativo $\quad$ esponente negativo

potenza con esponente positivo

Estrazione di radice

		Esempi
$\sqrt{\ }$	La radice quadrata di un numero **positivo** individua due valori opposti che elevati al quadrato danno entrambi il numero dato.	$\sqrt{+64} = +8$ $\sqrt{+64} = -8$
	La radice quadrata di un numero **negativo** non esiste nell'insieme *R*.	$\sqrt{-64}$ non esiste in *R*
$\sqrt[3]{\ }$	La radice cubica di un numero **positivo** è un numero positivo.	$\sqrt[3]{+64} = +4$
	La radice cubica di un numero **negativo** è un numero negativo.	$\sqrt[3]{-64} = -4$



MAPPA 15

Monomi

Si dice **monomio** una espressione algebrica **letterale** nella quale compaiono solo le operazioni di **moltiplicazione** e **divisione**.

Esempio:

- Sono monomi: $\underbrace{-5}_{\text{coefficiente}}\overbrace{xy}^{\text{parte letterale}}$ $\qquad \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{coefficiente}}\overbrace{b}^{\text{parte letterale}}$
- Non sono monomi: $2b + y$ $\qquad 3x - 2a$

Monomi simili, opposti e uguali

Monomi simili: monomi con la stessa parte letterale.

Esempio:

$\frac{1}{2}abc \qquad 5abc$

Monomi opposti: monomi con la stessa parte letterale e coefficienti opposti.

Esempio:

$\frac{3}{4}a^2b \qquad -\frac{3}{4}a^2b$

Monomi uguali: monomi con uguale coefficiente e uguale parte letterale.

Monomi interi e monomi fratti

I monomi in cui le **lettere** compaiono solo al **numeratore** e hanno **esponente positivo** sono monomi interi, altrimenti sono monomi fratti.

Esempio:

Sono monomi **interi**: $-5xy \qquad \frac{1}{2}b$

Sono monomi **fratti**: $\frac{2b}{y} \qquad 5a^{-2}$

Grado di un monomio

Grado assoluto: somma degli esponenti di tutte le lettere del monomio.

Esempio: $3\ a^2\ b\ c^4$

$2 + 1 + 4 = 7$ ovvero settimo grado

Grado rispetto a una lettera: l'esponente della lettera stessa.

Esempio: $3\ a^2\ b\ c^4$

grado rispetto ad a: secondo

Operazioni con i monomi

Addizione algebrica

La somma algebrica di due o più monomi **simili** è un monomio simile a quelli dati che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio:

$$+3ab - \frac{1}{2}ab + 4ab = (+3 - \frac{1}{2} + 4)ab = \frac{13}{2}ab$$

La somma algebrica di due o più monomi **non simili** si lascia indicata.

Esempio:

$$+3ab - 12ab^2 = +3ab - 12ab^2$$

Moltiplicazione

Il prodotto di due o più monomi è un monomio che ha per **coefficiente** il prodotto dei coefficienti e per **parte letterale** ogni lettera che figura nei monomi, presa una sola volta e con esponente uguale alla somma degli esponenti che essa ha in ciascun monomio.

Esempio:

$$(3a^2b) \times \left(\frac{1}{2}abc\right) = 3 \times \frac{1}{2} \times a^{2+1} \times b^{1+1} \times c = \frac{3}{2}\, a^3b^2c$$

Divisione

Il quoziente di due monomi tali che il primo sia divisibile per il secondo (diverso da zero) è un monomio che ha per **coefficiente** il quoziente dei coefficienti e per **parte letterale** ogni lettera del dividendo con esponente uguale alla differenza tra gli esponenti che essa ha nel dividendo e nel divisore.

Esempio:

$$(+8a^2b) : (-2a) = -4\, a^{2-1}b^{1-0} = -4ab$$

Potenza

La potenza di un monomio è un monomio ottenuto elevando all'esponente dato sia il **coefficiente** sia la **parte letterale**.

Esempio:

$$\left(+\frac{2}{3}ax^3y^2\right)^3 = +\frac{8}{27}a^3x^9y^6$$

Polinomi

Un polinomio è la somma algebrica di più monomi.

$\underbrace{2ax^2}\ \underbrace{+3c^3}\ \underbrace{-7ac^2}$ termini del polinomio

Grado di un polinomio

Il grado di un polinomio è il **maggiore** fra i gradi dei suoi termini.

Esempio:

$\underset{3}{a^3} - \underset{1+3=4}{\frac{4}{5}ab^3}$

Questo polinomio è di 4° grado.

Binomi, trinomi, quadrinomi

A seconda del **numero dei termini** di un polinomio si parla di:

binomi: se i termini sono due;
Esempio: $2ax + 3b$

trinomi: se i termini sono tre;
Esempio: $2ax^2 + 3c^3 - 7ac^2$

quadrinomi: se i termini sono quattro.
Esempio: $-7x^3 + 2x^2y + \frac{1}{2}x - 3y^3$

Polinomio ordinato

Un polinomio si dice **ordinato rispetto a una lettera** se i suoi termini compaiono uno di seguito all'altro in modo che gli esponenti di tale lettera siano crescenti o decrescenti.
Esempio: $-2x^4 + 3x^3y - 5x^2 + x$

Operazioni con i polinomi

Addizione

La **somma** di due (o più) polinomi si ottiene scrivendo uno dopo l'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno.
Successivamente si riducono gli eventuali termini simili.

Esempio:

$(3a^2b + 4ax) + (a^2b - 2ax) =$
$= \underline{3a^2b} + \underline{\underline{4ax}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{2ax}} =$
$= 4a^2b - 2ax$

Sottrazione

La **differenza** di due polinomi si ottiene scrivendo uno dopo l'altro i termini del primo polinomio e i termini del secondo cambiati di segno. Successivamente si riducono gli eventuali termini simili.

Esempio:

$(3a^3b + 4by) - (-2a^3b - by) =$
$= \underline{3a^3b} + \underline{\underline{4by}} + \underline{2a^3b} + \underline{\underline{by}} =$
$= 5a^3b + 5by$

Moltiplicazione

Il **prodotto di un monomio e un polinomio** si ottiene moltiplicando il monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio:

$$2b \cdot \left(2x - \frac{1}{3}ay^2\right) = 2b \cdot (2x) + 2b \cdot \left(-\frac{1}{3}ay^2\right) = 4bx - \frac{2}{3}aby^2$$

Il **prodotto di due polinomi** si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Esempio:

$(3a^2 + 4b) \cdot (2a^3 - b) = (3a^2) \cdot (2a^3 - b) + (4b) \cdot (2a^3 - b) =$
$= 6a^5 - 3a^2b + 8a^3b - 4b^2$

Divisione

Il **quoziente di un polinomio per un monomio** si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.

Esempio:

$(3a^3b + 4a^2y) : (-2a^2) =$
$= (3a^3b) : (-2a^2) +$
$+ (4a^2y) : (-2a^2) = -\frac{3}{2}ab - 2y$

Prodotti notevoli

$(a + b) \cdot (a - b)$

Il **prodotto della somma di due monomi per la loro differenza** è uguale alla differenza dei quadrati dei singoli monomi.

$$\underbrace{\overset{\text{somma}}{(a+b)} \times \overset{\text{differenza}}{(a-b)}}_{\text{prodotto}} = \overset{\text{differenza}}{\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{quadrati}}}$$

$(a \pm b)^2$

Il **quadrato di un binomio** è un trinomio avente per termini:
- il quadrato del primo termine;
- il doppio prodotto del primo per il secondo termine;
- il quadrato del secondo termine.

$$\overset{\text{quadrato}}{(a+b)^2} = \overset{\text{quadrato}}{a^2} + \underset{\text{doppio prodotto}}{2ab} + \overset{\text{quadrato}}{b^2}$$

$$\underset{\text{quadrato}}{(a-b)^2} = \underset{\text{quadrato}}{a^2} - \overset{\text{doppio prodotto}}{2ab} + \underset{\text{quadrato}}{b^2}$$

$(a \pm b)^3$

Il **cubo di un binomio** è un quadrinomio avente per termini:
- il cubo del primo termine;
- il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo;
- il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo;
- il cubo del secondo termine.

$$\overset{\text{cubo}}{(a+b)^3} = \overset{\text{cubo}}{a^3} + \underset{\text{triplo prodotto}}{3a^2b} + \underset{\text{triplo prodotto}}{3ab^2} + \overset{\text{cubo}}{b^3}$$

$$\underset{\text{cubo}}{(a-b)^3} = \underset{\text{cubo}}{a^3} - \overset{\text{triplo prodotto}}{3a^2b} + \overset{\text{triplo prodotto}}{3ab^2} - \underset{\text{cubo}}{b^3}$$

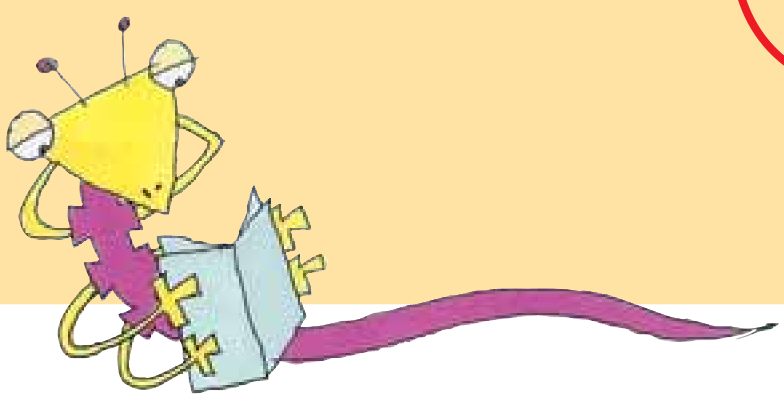
MAPPA 16

Equazioni

Un'equazione è un'**uguaglianza** fra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, **verificata solo per particolari valori** attribuiti all'incognita o alle incognite che in essa figurano.

Esempio:

$$\underbrace{-3\overset{\text{incognita}}{x}+2}_{\text{1° membro}}=\underbrace{+5}_{\text{2° membro}} \qquad \text{da cui} \qquad x=\underbrace{-1}_{\text{soluzione o radice}}$$



Identità

Una identità è un'**uguaglianza** fra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, **verificata per qualsiasi valore** attribuito alla lettera o alle lettere che in essa figurano.

Esempio: $3x = 2x + x$

Equazione ridotta in forma normale

Un'equazione di 1° grado a un'incognita si dice ridotta in forma normale quando risulta espressa da:

$$\underbrace{a}_{\text{coefficiente dell'incognita}}x=\underbrace{b}_{\text{termine noto}}$$

Discussione di un'equazione ridotta in forma normale

Consideriamo l'equazione ridotta in forma normale $ax = b$.

- Se $a \neq 0$ allora l'equazione ammette **una soluzione** $x = \frac{b}{a}$ e si dice **determinata**.
- Se $a = 0$ e $b = 0$ allora ogni valore di x rende vera l'uguaglianza $0 \cdot x = 0$: l'equazione ammette **infinite soluzioni** e si dice **indeterminata**.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ allora l'equazione non ammette nessuna soluzione e si dice **impossibile**, poiché non esiste alcun numero che, moltiplicato per zero, dia per prodotto un numero b diverso da zero.

Equazioni equivalenti

Due equazioni si dicono equivalenti se ammettono le **stesse soluzioni**.

Esempio:

$3x = 6$ da cui $x = 2$

$-7x = -14$ da cui $x = 2$

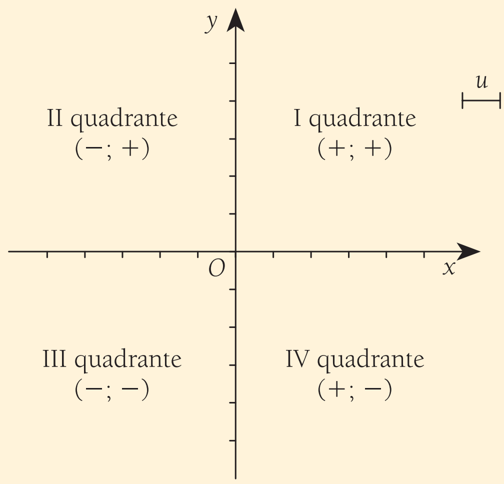
Principi di equivalenza

	Conseguenze	*Esempi*
Primo principio di equivalenza Addizionando o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica, si ottiene un'equazione equivalente alla data.	In una equazione un termine qualsiasi può essere trasportato da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno (**principio del trasporto**).	Data l'equazione: $5x + 8x + 3 - 2 = +7 + 15x + 3$ applichiamo il principio del trasporto: $5x + 8x + 3 - 2 = +7 + 15x + 3$ Si ottiene: $5x + 8x + 3 - 15x = +7 + 3 + 2$
	Se in un'equazione figurano in entrambi i membri due termini uguali questi possono essere **eliminati** (elisi).	Eliminiamo i termini uguali: $5x + 8x + \cancel{3} - 15x = +7 + \cancel{3} + 2$ Riducendo i termini simili: $\underline{5x} + \underline{8x} - \underline{15x} = \underline{\underline{+7}}\ \underline{\underline{+2}}$ $-2x = +9$
Secondo principio di equivalenza Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, si ottiene un'equazione equivalente all'equazione data.	**Cambiando il segno** a ciascun termine di una equazione se ne ottiene un'altra equivalente a quella data.	Cambiamo il segno a ciascun termine dell'equazione precedente: $2x = -9$ Dividiamo entrambi i membri per 2: $\frac{2x}{2} = -\frac{9}{2}$ da cui $x = -\frac{9}{2}$
	Un'equazione a termini frazionari si può trasformare in un'equazione equivalente a termini interi **moltiplicando il primo e il secondo membro per il m.c.m.** dei denominatori che vi compaiono.	Data l'equazione: $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = +\frac{7}{4}$ moltiplichiamo entrambi i membri per il m.c.m. dei denominatori: m.c.m. $(5, 2, 4) = 20$ $20 \cdot \left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x\right) = +\frac{7}{4} \cdot 20$ $12x + 10x = +35$ $22x = 35$ Dividiamo entrambi i membri per 22: $\frac{22x}{22} = \frac{35}{22}$ da cui $x = \frac{35}{22}$

Il metodo delle coordinate

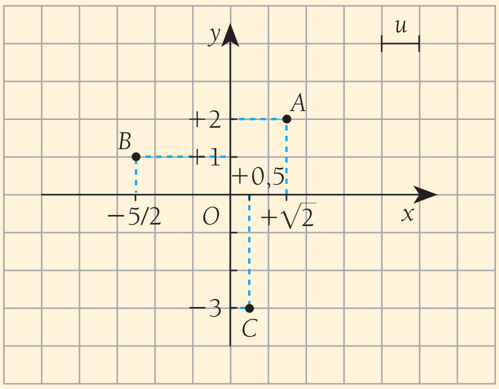
La **geometria analitica** si basa sul **metodo delle coordinate** che consiste nell'associare ai punti del piano particolari coppie di numeri dette appunto **coordinate**. In questo modo le proprietà di una figura geometrica si possono esprimere algebricamente con relazioni ed equazioni.
L'"ambiente" della geometria analitica è il **piano cartesiano** e cioè un piano in cui è fissato un sistema di riferimento.

Sistema di riferimento cartesiano



Coordinate cartesiane

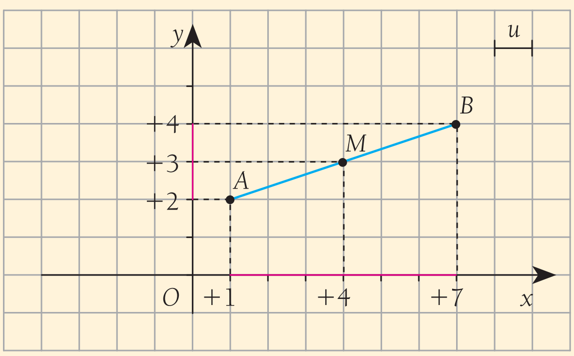
A ogni **punto** del piano corrisponde una **coppia ordinata di numeri reali** e, viceversa, a ogni coppia ordinata di numeri reali corrisponde un punto del piano.



Le coordinate del punto medio di un segmento

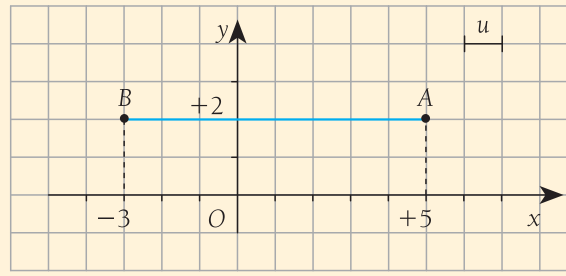
Il punto medio M di un segmento di estremi $A(x_A;\ y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$ ha coordinate uguali alla semisomma delle ascisse e delle ordinate di A e di B:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

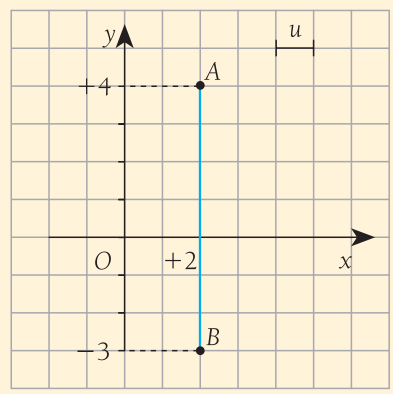


Distanza fra due punti

- La misura della distanza fra due punti $A(x_A;\ y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$ che hanno la **stessa ordinata** $y_A = y_B$ è: $\overline{AB} = |x_A - x_B|$

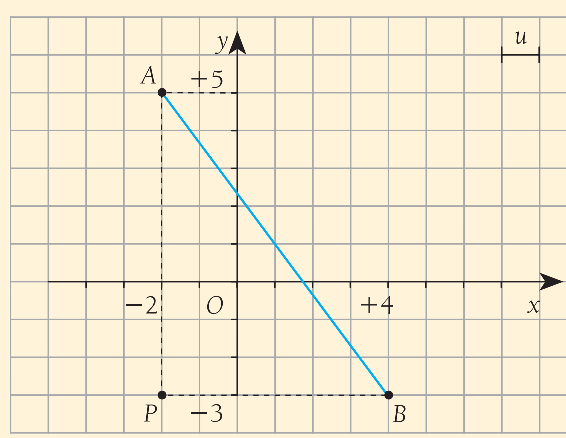


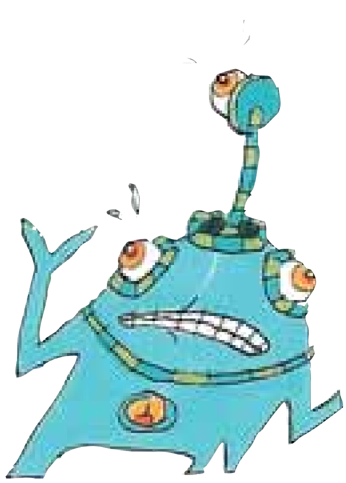
- La misura della distanza tra due punti $A(x_A;\ y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$ che hanno la **stessa ascissa** $x_A = x_B$ è: $\overline{AB} = |y_A - y_B|$



- La misura della distanza fra due punti **qualsiasi** $A(x_A;\ y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$ è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

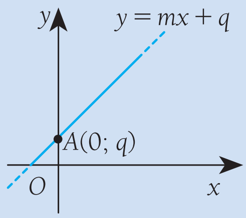




Equazione di una retta

L'equazione di una retta generica del piano (non parallela all'asse delle y) è del tipo:

$$y = \underbrace{m}_{\text{coefficiente angolare}}x + \underbrace{q}_{\text{termine noto}}$$



m è detto **coefficiente angolare della retta**, e dal suo valore dipende l'inclinazione della retta, cioè l'angolo che la retta forma con l'asse x.

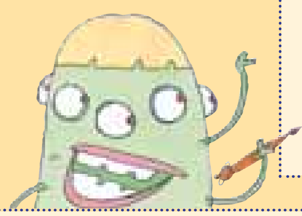
q è il **termine noto** e rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y.

Funzione della proporzionalità diretta

Una retta che passa per l'origine con equazione:

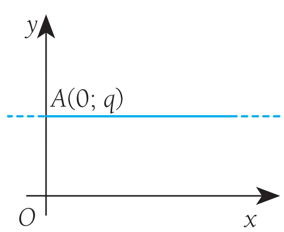
$y = k \cdot x$ $(k \neq 0)$

rappresenta il **grafico della funzione della proporzionalità diretta**.



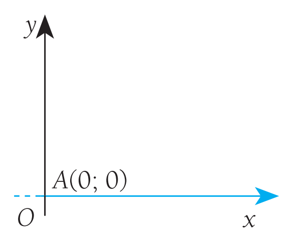
L'equazione di una retta **parallela all'asse delle x** è del tipo:

$$y = q$$



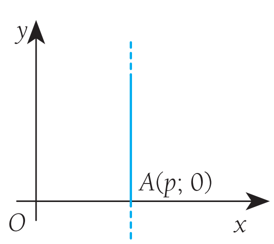
L'equazione della retta **coincidente con l'asse delle x** è:

$$y = 0$$



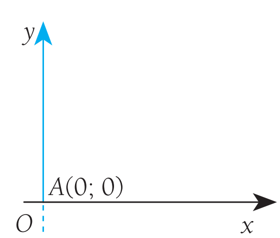
L'equazione di una retta **parallela all'asse delle y** è del tipo:

$$x = p$$



L'equazione di una retta **coincidente con l'asse delle y** è:

$$x = 0$$



Rette parallele

Due rette che hanno lo stesso coefficiente angolare sono parallele: $m = m'$.

Esempi: $y = 2x - 3$ e $y = 2x - 5$

Rette perpendicolari

Due rette che hanno coefficienti angolari di segno opposto e con valori assoluti reciproci sono perpendicolari: $m = -\frac{1}{m'}$.

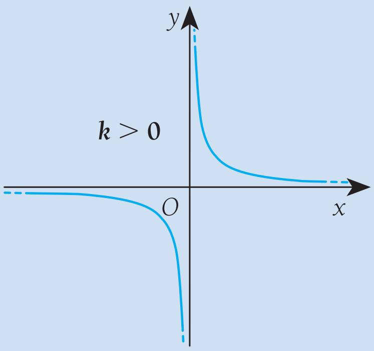
Esempi: $y = +2x$ e $y = -\frac{1}{2}x$

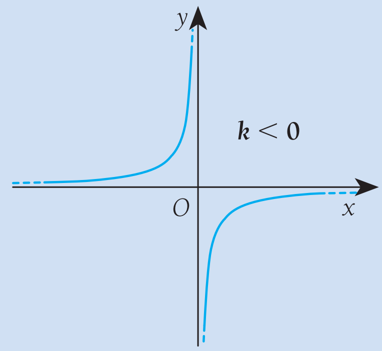
NUMERI

Iperbole equilatera

L'equazione di una generica iperbole equilatera è:

$$y = \frac{k}{x} \quad (\text{con } x \neq 0)$$





Il numero k rappresenta il valore costante del prodotto delle due coordinate di un qualsiasi punto della curva: $k = xy$.

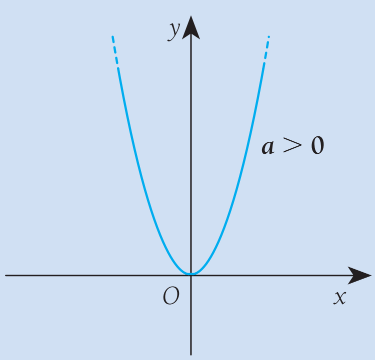
Funzione della proporzionalità inversa

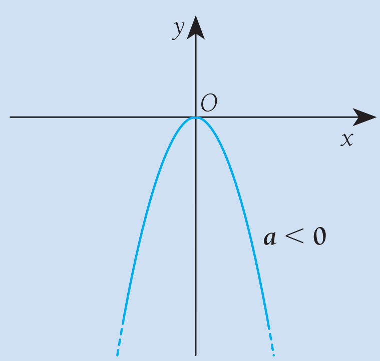
Un'iperbole equilatera con equazione $y = \frac{k}{x}$ $(k,\ x \neq 0)$ rappresenta il **grafico della funzione della proporzionalità inversa**.

Parabola

L'equazione di una generica parabola che ha il vertice nell'origine O è:

$$y = ax^2 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$





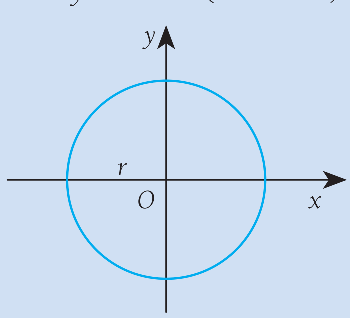
Funzione della proporzionalità quadratica

Una parabola con equazione $y = kx^2$ $(k \neq 0)$ rappresenta il **grafico della funzione della proporzionalità quadratica**.

Circonferenza

L'equazione di una circonferenza con centro nell'origine O e con raggio di misura r è:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (\text{con } r \neq 0)$$

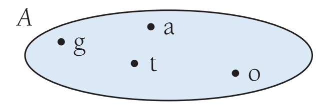


La circonferenza non è una funzione

La circonferenza con equazione $x^2 + y^2 = r^2$ non è una funzione perché a **un** valore di x corrispondono **due** valori di y.

MAPPA 18 Gli insiemi: operazioni e relazioni

Rappresentazione degli insiemi

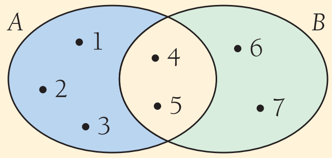
Per caratteristica	Per elencazione	Con i diagrammi di Eulero-Venn
$A = \{x/x$ è una lettera della parola *gatto*$\}$	$A = \{g, a, t, o\}$	

Operazioni con gli insiemi

Dati due insiemi A e B, consideriamo le operazioni di intersezione, unione, differenza, prodotto.

Differenza

- La differenza tra A e B è l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono ad A e non a B.
- La differenza tra B e A è l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono a B e non ad A.



Esempio: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$;
$C = A - B = A \setminus B = \{1, 2, 3\}$;
$D = B - A = B \setminus A = \{6, 7\}$

Intersezione

L'intersezione di A e di B è l'insieme formato da tutti gli elementi comuni all'insieme A e all'insieme B.

Esempio: $A = \{3, 4, 5, 8\}$;
$B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$;
$A \cap B = \{3, 4, 5\}$

Unione

L'unione di A e di B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi.

Esempio: $A = \{3, 4, 5, 8\}$;
$B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$;
$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

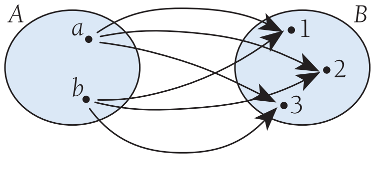
Prodotto

Il prodotto cartesiano tra A e B è l'insieme $A \times B$ formato da tutte le coppie ordinate aventi come primo componente un elemento di A e come secondo componente un elemento di B.

Esempio: $A = \{a, b\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$

Rappresentazione grafica di un prodotto cartesiano

Diagramma a frecce



Reticolo cartesiano

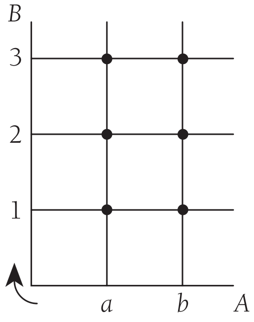


Tabella a doppia entrata

B

A	$\times$	**1**	**2**	**3**
	a	$(a; 1)$	$(a; 2)$	$(a; 3)$
	b	$(b; 1)$	$(b; 2)$	$(b; 3)$

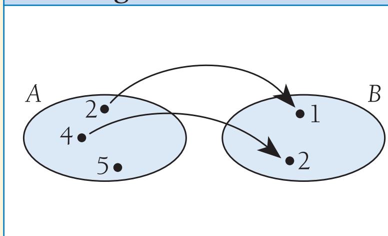
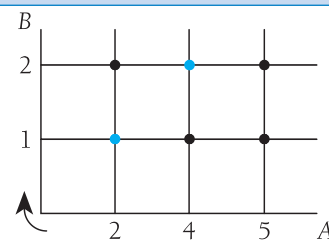
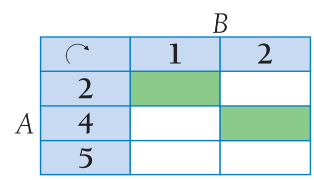
Relazione tra gli elementi di due insiemi

Una **relazione** fra due insiemi A e B esprime un legame tra gli elementi del primo insieme A e quelli del secondo insieme B.

Esempio: $A = \{2, 4, 5\}$; $B = \{1, 2\}$
Relazione: "a è il doppio di b"
$\mathcal{R} = \{(2; 1), (4; 2)\}$

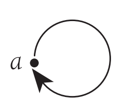
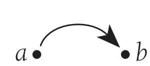
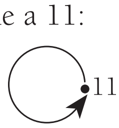
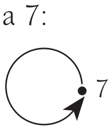
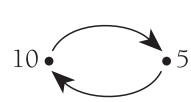
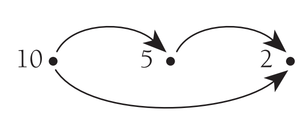
Corrispondenza biunivoca
Due insiemi sono in corrispondenza biunivoca quando a ogni elemento del primo insieme corrisponde *uno e un solo* elemento del secondo insieme e, viceversa, ogni elemento del secondo insieme è il corrispondente di *uno e un solo* elemento del primo.

Rappresentazione grafica di una relazione

Diagramma a frecce	Grafico cartesiano	Tabella a doppia entrata
		

Relazioni tra gli elementi di un insieme

Le proprietà delle **relazioni in un insieme** sono riassunte nella tabella.

Proprietà riflessiva	Proprietà simmetrica	Proprietà transitiva
Ogni elemento a è in relazione con se stesso. 	Se un elemento a è in relazione con un elemento b, allora anche b è in relazione con a. Se:  allora: 	Se un primo elemento a è in relazione con un secondo elemento b e b è in relazione con un terzo elemento c, allora a è in relazione con c. Se:  allora: 
Esempi: 11 è uguale a 11:  7 è uguale a 7:  La relazione è **riflessiva**.	*Esempio*: Se 10 è diverso da 5, anche 5 è diverso da 10:  La relazione è **simmetrica**.	*Esempio*: Se 10 è maggiore di 5 e 5 è maggiore di 2, allora 10 è maggiore di 2:  La relazione è **transitiva**.

Proposizioni e valori di verità

La logica matematica si basa su frasi dette **proposizioni** che possono essere soltanto o **vere** o **false.**
Le proposizioni si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto: p, q, r, s, ...
I **valori di verità** *vero* o *falso* si indicano rispettivamente con V e F o anche con le cifre 1 e 0.
Esempi:
p: "Genova è in Liguria" valore di verità di p: V
q: "Il numero 13 è pari" valore di verità di q: F

Operazioni logiche

Operando sulle proposizioni con i **connettivi logici** **e**, **o**, **non**, si ottengono nuove proposizioni, **semplici** o **composte**; le operazioni nell'insieme delle proposizioni, che hanno come *operatori* i connettivi logici, si chiamano **operazioni logiche**.

La congiunzione: "e"

La proposizione composta $p \wedge q$ è vera solo se **entrambe** le proposizioni p e q che la compongono sono vere.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio:
La proposizione composta: "Il gatto è un mammifero **e** il gatto vola" è falsa perché la seconda delle proposizioni semplici che la compongono ("il gatto vola") è falsa.

La disgiunzione inclusiva: "o"

La proposizione composta $p \vee q$ è vera se **almeno una** delle proposizioni p e q è vera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio:
La proposizione composta: "Il gatto è un mammifero **o** il gatto vola" è vera perché, anche se la seconda delle proposizioni semplici che la compongono è falsa, è sufficiente che sia vera la prima ("il gatto è un mammifero").

La negazione: "non"

Data la proposizione p, la proposizione che la nega si indica con $\overline{p}$ (o anche $\neg p$).
La negazione cambia il valore di verità delle proposizioni.

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Esempi:
p: "Il gatto è un mammifero" (p è vera)
$\overline{p}$: "Il gatto **non** è un mammifero" ($\overline{p}$ è falsa)

Operazioni logiche e insiemi

Esiste una corrispondenza tra operazioni logiche e operazioni tra insiemi.

Congiunzione e intersezione

Ogni elemento dell'insieme intersezione ($\cap$) si può descrivere con una proposizione vera composta utilizzando il connettivo **e** ($\wedge$).

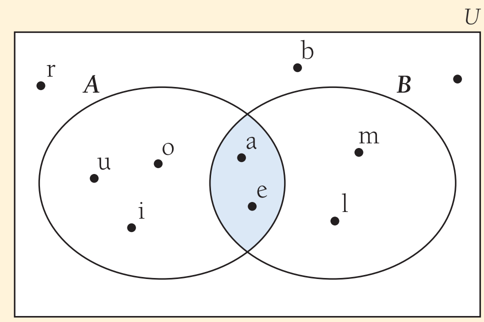
$A \cap B = \{x/x$ appartiene ad $A \wedge$ appartiene a $B\}$

Esempio:

$A = \{x/x$ è una vocale$\} = \{$a, e, i, o, u$\}$

$B = \{x/x$ è una lettera della parola mela$\} = \{$m, e, l, a$\}$

$A \cap B = \{x/x$ è una vocale **e** una lettera della parola mela$\} = \{$a, e$\}$



Disgiunzione e unione

Ogni elemento dell'insieme unione ($\cup$) si può descrivere con una proposizione vera composta utilizzando il connettivo **o** ($\vee$).

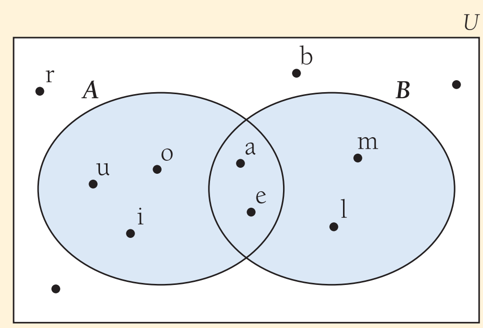
$A \cup B = \{x/x$ appartiene ad $A \vee$ appartiene a $B\}$

Esempio:

$A = \{x/x$ è una vocale$\} = \{$a, e, i, o, u$\}$

$B = \{x/x$ è una lettera della parola mela$\} = \{$m, e, l, a$\}$

$A \cup B = \{x/x$ è una vocale **o** una lettera della parola mela$\} = \{$a, e, i, o, u, m, l$\}$



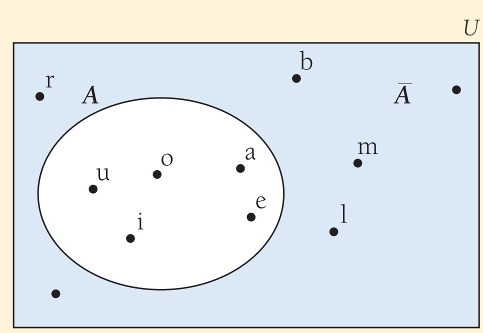
Negazione e insieme complementare

Ogni elemento dell'insieme complementare $\overline{A}$ si può descrivere con una proposizione vera ottenuta operando con il connettivo **non** ($\neg$) su una proposizione che descrive la caratteristica di A.

Esempio:

$A = \{x/x$ è una vocale$\} = \{$a, e, i, o, u$\}$

$\overline{A}$ complementare di A rispetto all'insieme universo U di tutte le lettere dell'alfabeto italiano è descritto da $\overline{A} = \{x/x \neg$ è una vocale$\}$.



Espressioni logiche

Una **espressione logica** è una proposizione che si ottiene collegando tra loro due o più proposizioni semplici p, q, r, ... con uno o più connettivi.

Sono espressioni logiche:

$$p \vee (q \wedge r) \qquad (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{r \vee s})$$

Anche nelle espressioni logiche le parentesi indicano le precedenze delle operazioni.

Risolvere una espressione logica vuol dire calcolare o stabilire il suo valore di verità.

MAPPA 20 Calcolo delle probabilità

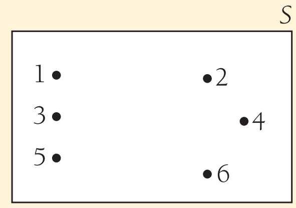
Calcolo delle probabilità e insiemi

Per affrontare il calcolo delle probabilità intesa dal punto di vista classico, si ricorre al linguaggio degli insiemi.

Gli eventi come insiemi

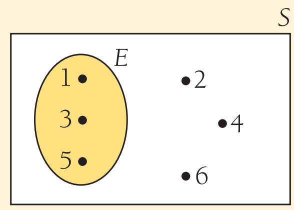
Considerando un evento, i **casi possibili** si rappresentano come elementi di un insieme S detto **spazio campionario**. Lo spazio campionario è l'**insieme universo** in cui operare.

Esempio: Nel lancio di un dado i casi possibili sono gli elementi di S:
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Considerando un evento, i **casi favorevoli** al verificarsi dell'evento sono elementi di un **sottoinsieme** E di S.

Esempio: Nel lancio di un dado i casi favorevoli al verificarsi dell'evento E: "Esce una faccia contrassegnata con un numero dispari" sono gli elementi di E:
$E = \{1, 3, 5\}$
$E \subset S$

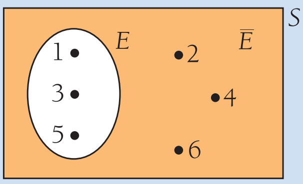


Evento contrario

Si dice evento contrario di un dato evento E l'evento che si verifica quando e soltanto quando *non* si verifica l'evento E. Lo indichiamo con $\overline{E}$.

Esempio: Nel lancio di un dado l'evento contrario di E: "Esce una faccia contrassegnata con un numero dispari" è $\overline{E}$: "**Non** esce una faccia contrassegnata con un numero dispari".

L'evento contrario rappresenta l'**insieme complementare** dell'insieme dato rispetto allo spazio campionario S : $\overline{E}$ è detto anche evento complementare di E.



Calcolo della probabilità di un evento e del suo contrario

La somma della probabilità di un evento e di quella del suo evento contrario è 1.

$P(E) + P(\overline{E}) = 1$ da cui $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ e $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

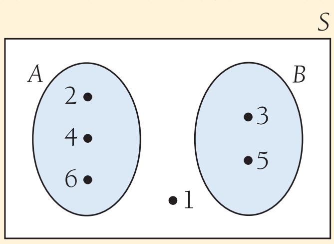
Evento totale

Un evento costituito da più eventi che si riferiscono a una **stessa prova** si dice evento totale. Gli eventi che lo costituiscono sono detti **eventi parziali** e possono essere incompatibili o compatibili.

Eventi incompatibili

Due eventi si dicono incompatibili quando, nel corso di una stessa prova, il verificarsi dell'uno **esclude** il verificarsi dell'altro.

Esempio: Nel lancio di un dado l'evento totale C: "Esce una faccia contrassegnata da un numero pari o da un numero dispari maggiore di 2" è costituito da due eventi incompatibili.

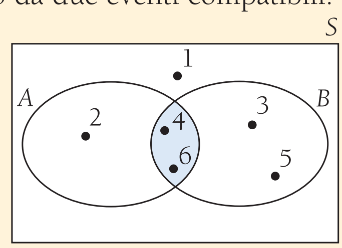


$A \cap B = \varnothing$: cioè i due eventi non hanno alcun caso favorevole in comune.

Eventi compatibili

Due eventi si dicono compatibili quando, nel corso di una stessa prova, il verificarsi dell'uno **non esclude** il verificarsi dell'altro.

Esempio: Nel lancio di un dado l'evento totale C: "Esce una faccia contrassegnata da un numero pari o da un numero maggiore di 2" è costituito da due eventi compatibili.



$A \cap B \neq \varnothing$: cioè i due eventi hanno alcuni casi favorevoli in comune.

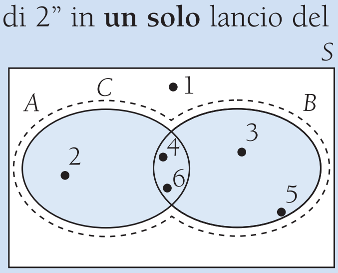
Probabilità totale

La probabilità che si verifichi **almeno uno** degli eventi parziali che compongono un evento totale è detta **probabilità totale**.

L'evento totale C di due eventi parziali A e B si può rappresentare con l'**unione** dei relativi insiemi:

$C = A \cup B$

Esempio: Nel lancio di un dado la probabilità totale dell'evento C "Esce una faccia contrassegnata da un numero pari o maggiore di 2" è riferita al verificarsi di **almeno una** delle due condizioni "il numero è pari" o "il numero è maggiore di 2" in **un solo** lancio del dado.



Calcolo della probabilità totale di eventi incompatibili

Se due eventi parziali A e B sono incompatibili, la probabilità dell'evento totale C è uguale alla somma delle probabilità di ciascuno degli eventi parziali A e B:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) = P(B)$$

Calcolo della probabilità totale di eventi compatibili

Se due eventi parziali A e B sono compatibili, la probabilità dell'evento totale C è uguale alla somma delle probabilità di ciascuno degli eventi parziali A e B diminuita della probabilità che si verifichino contemporaneamente ($A \cap B$):

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Evento composto

Un evento costituito da più eventi che si riferiscono a **più prove** si dice evento composto. Gli eventi che lo costituiscono sono detti **eventi semplici** e possono essere indipendenti o dipendenti.

Eventi indipendenti

Due eventi si dicono indipendenti se l'esito relativo a uno di essi **non altera** la probabilità del verificarsi dell'altro.

Esempio: L'evento E: "Al primo lancio di un dado esce il numero 4 e al secondo un numero dispari" è composto da due eventi indipendenti: il numero che esce al primo lancio non influenza quello che uscirà nel secondo.

Eventi dipendenti

Due eventi si dicono dipendenti se l'esito relativo a uno di essi **altera** la probabilità del verificarsi dell'altro.

Esempio: L'evento E: "Da un'urna contenente una pallina bianca e una nera estraggo prima la pallina bianca e, senza reintrodurre la pallina estratta, estraggo poi la pallina nera" è composto da due eventi dipendenti. Infatti, se nella prima estrazione esce la pallina bianca, questa non sarà più disponibile per la seconda estrazione.

Probabilità composta

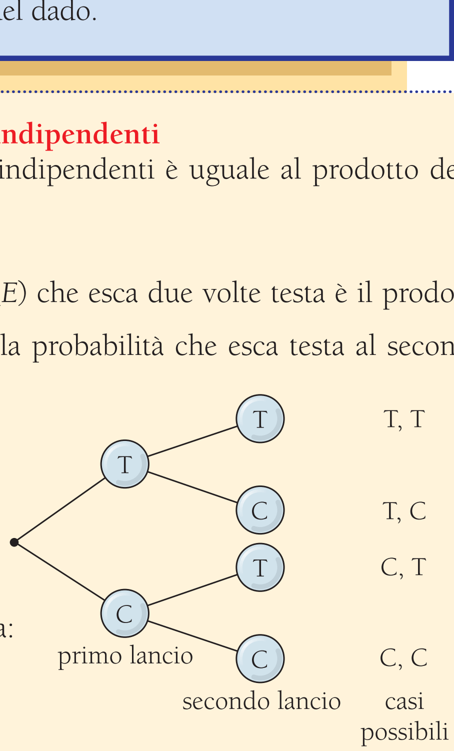
La probabilità che gli eventi semplici che costituiscono un evento composto si verifichino contemporaneamente è detta **probabilità composta**.
Esempio: In due lanci di un dado la probabilità composta dell'evento E: "Al primo lancio esce il numero 4 e al secondo lancio un numero dispari" è riferita al verificarsi di **entrambe** le condizioni "il numero è 4" e "il numero è dispari" in **due** lanci del dado.

Calcolo della probabilità di un evento composto da eventi indipendenti

La probabilità di un evento composto da due eventi semplici indipendenti è uguale al prodotto della probabilità di ciascuno degli eventi semplici:
$P(E) = P(E_1) \times P(E_2)$

Esempio: In due lanci successivi di una moneta la probabilità $P(E)$ che esca due volte testa è il prodotto della probabilità che esca testa al primo lancio $P(E_1) = \frac{1}{2}$ per la probabilità che esca testa al secondo lancio $P(E_2) = \frac{1}{2}$:
$P(E) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ cioè il 25%

Rappresentiamo i casi possibili con un diagramma ad albero:



Rappresentiamo i casi possibili con una tabella a doppia entrata:

	T	C
T	(T, T)	(T, C)
C	(C, T)	(C, C)

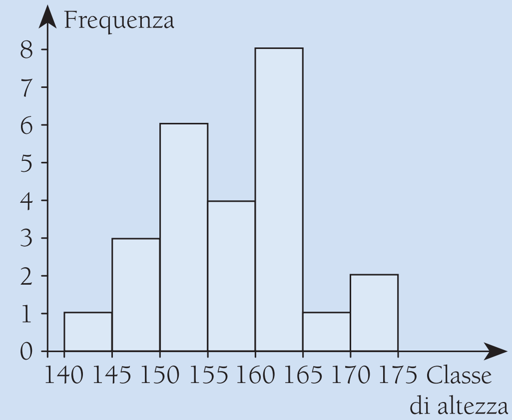
Il raggruppamento in classi

Quando si fanno indagini di tipo quantitativo relative a campioni molto numerosi e ordinabili è utile raggruppare i valori registrati in **classi di distribuzione**.

Esempio: I valori dell'altezza degli alunni di una classe, che variano tra 140 cm e 175 cm, possono essere raggruppati in classi di distribuzione di ampiezza 5 cm quali (in centimetri):

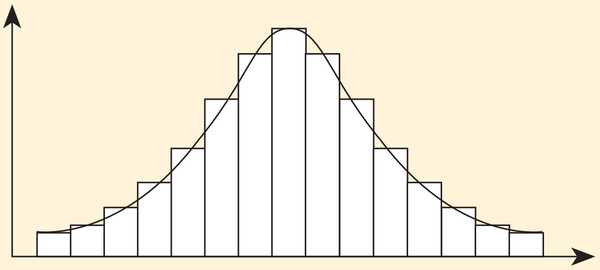
140-145, 145-150, 150-155, 155-160, 160-165, 165-170, 170-175

I valori che coincidono con il valore di separazione fra due classi di distribuzione si collocano, per convenzione, nella classe superiore.



La curva di Gauss

Rappresentando graficamente i valori relativi alle frequenze delle diverse classi si ottiene un istogramma. La linea spezzata che si ottiene congiungendo i punti medi delle basi superiori di ogni rettangolo dell'istogramma prende il nome di **poligono delle frequenze**. Quando il numero delle registrazioni è molto alto il poligono delle frequenze assume la forma della sezione di una campana, detta **curva di Gauss**.



Frequenza cumulata assoluta

Quando si opera con classi ordinabili, se vogliamo sapere quante mappa statistiche sono inferiori a un certo valore, si calcola la **frequenza cumulata assoluta**, cioè la frequenza che si ottiene addizionando la frequenza assoluta delle singole modalità con cui il dato oggetto di studio si presenta.

Esempio:

Classi ordinabili	Frequenza assoluta (f)	Frequenza cumulata assoluta
I	1	1
II	3	$4(1+3)$
III	6	$10(1+3+6)$
IV	4	$14(1+3+6+4)$

La statistica

La statistica si suddivide in:

Descrittiva

Si occupa di:
- raccogliere i dati;
- elaborare i dati;
- descrivere i dati.

Induttiva

Si occupa dei metodi che permettono di trasferire all'intera popolazione i risultati di un'indagine condotta su di un campione della popolazione stessa.

Caratteristiche delle rilevazioni

Rilevazioni complete
Vengono rilevati i dati relativi a **ogni** unità statistica.

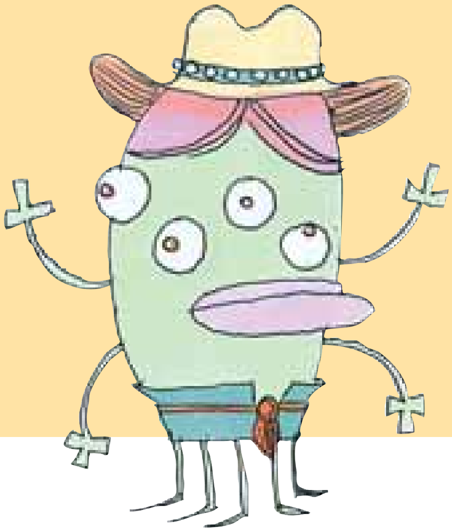
Rilevazioni per campione
Vengono rilevati i dati relativi solo ad **alcune** unità statistiche (il campione).

Il campione deve essere:
- ampio, cioè deve prendere in esame un numero elevato di unità;
- significativo, cioè deve essere rappresentativo di tutta la popolazione in esame.

Per la scelta del campione si può:
- estrarre a sorte;
- suddividere il campione in gruppi (strati) e poi estrarre a sorte.

Classificazione delle indagini statistiche

Le indagini statistiche possono essere:
- continue;
- periodiche;
- occasionali.



Frequenza cumulata relativa

Frequenza che si ottiene addizionando la frequenza relativa delle singole modalità. Si esprime in percentuale.

NUMERI