MAPPA 8

L'estrazione di radice e i numeri reali assoluti

Il concetto di radice

Estrarre la radice quadrata (terza, quarta ecc.) di un numero significa determinare quel numero che, elevato alla seconda (alla terza, alla quarta ecc.), dà il numero dato:

indice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← **radice *n*-esima**

radicando → a

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{se } b^n = a \quad (n \in N_0)$$

Esempi:

indice 2, **radicando 4**: $\sqrt[2]{4} = 2$ ← **radice quadrata**

operazione inversa all'elevamento al quadrato

$2 \xrightarrow{(\ )^2} 4$, $\quad 4 \xrightarrow{\sqrt[2]{\ }} 2$ $\qquad 2^2 = 4$

indice 3, **radicando 8**: $\sqrt[3]{8} = 2$ ← **radice cubica**

operazione inversa all'elevamento al cubo

$2 \xrightarrow{(\ )^3} 8$, $\quad 8 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} 2$ $\qquad 2^3 = 8$

L'operazione di estrazione di radice e i numeri irrazionali assoluti

La radice quadrata di un numero razionale assoluto può avere come risultato:

- un numero **razionale assoluto**;

  Esempio:

  $\sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$

- un numero **irrazionale assoluto**, quando non esiste un numero razionale che elevato al quadrato dia il radicando.

  I numeri irrazionali assoluti sono numeri *decimali illimitati non periodici*; non sono razionali, perché non possono essere scritti come frazioni.

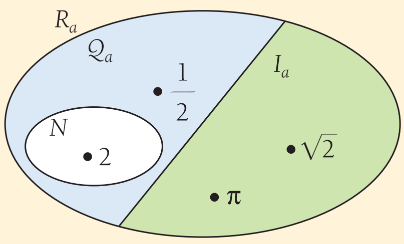
  I numeri irrazionali assoluti formano l'insieme I_a.

  Esempio: $\sqrt{2} = 1{,}414235\ldots$

  $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

Numeri reali assoluti

Un numero reale assoluto è un qualsiasi numero **razionale** assoluto o **irrazionale** assoluto.
I numeri reali assoluti costituiscono l'insieme R_a.



Quadrati perfetti

I quadrati perfetti sono i numeri naturali la cui radice quadrata è un numero naturale.

Esempi:

$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$,

$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, ...

Quindi 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... sono quadrati perfetti.

Quadrati perfetti scomposti in fattori

Un numero naturale > 1 è un quadrato perfetto se tutti gli esponenti dei suoi fattori primi sono numeri pari.

Esempio: $144 = 2^4 \times 3^2$ è un quadrato perfetto, infatti $\sqrt{144} = 12$.

Per estrarre la radice quadrata di un quadrato perfetto scomposto in fattori primi bisogna dividere gli esponenti per 2.

Esempio: $\sqrt{144} = 2^{4:2} \times 3^{2:2} = 2^2 \times 3 = 12$

Cubi perfetti

I cubi perfetti sono i numeri naturali la cui radice cubica è un numero naturale.

Esempi:

$\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$,

$\sqrt[3]{125} = 5$, ...

Quindi 1, 8, 27, 64, 125, ... sono cubi perfetti.

Cubi perfetti scomposti in fattori

Un numero naturale > 1 è un cubo perfetto se gli esponenti relativi ai fattori primi sono multipli di 3.

Esempio: $1728 = 2^6 \times 3^3$ è un cubo perfetto, infatti $\sqrt{1728} = 12$.

Per estrarre la radice cubica di un cubo perfetto scomposto in fattori primi bisogna dividere gli esponenti per 3.

Esempio: $\sqrt[3]{1728} = 2^{6:3} \times 3^{3:3} = 2^2 \times 3 = 12$

Proprietà delle radici

- La **radice quadrata di un prodotto** è uguale al prodotto delle radici quadrate dei singoli fattori: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

  Esempio: $\underbrace{\sqrt{36 \times 25}}_{\textbf{radice del prodotto}} = \underbrace{\sqrt{36} \times \sqrt{25}}_{\textbf{prodotto delle radici}}$

- La **radice quadrata di un quoziente** è uguale al quoziente delle radici quadrate del dividendo e del divisore: $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ (o viceversa) oppure $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

  Esempio: $\underbrace{\sqrt{32 : 2}}_{\textbf{radice del quoziente}} = \underbrace{\sqrt{32} : \sqrt{2}}_{\textbf{quoziente delle radici}}$

- La **radice quadrata di una potenza** con esponente pari è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la metà dell'esponente del radicando: $\sqrt{a^{2n}} = a^n$.

  Esempio: $\sqrt{4^6} = 4^3 = 64$

MAPPA 9

Rapporti e proporzioni

Rapporti tra numeri

Dati due numeri a e b ($b \neq 0$), il **rapporto** tra i due numeri è il loro **quoziente**.
a e b sono detti **termini** del rapporto.

Esempio:
Rapporto tra 7 e 3:

antecedente — **antecedente**

$7 : 3$ oppure $\dfrac{7}{3}$

conseguente — **conseguente**

Rapporto inverso

Il rapporto inverso tra 7 e 3 è $3 : 7 = \dfrac{3}{7}$

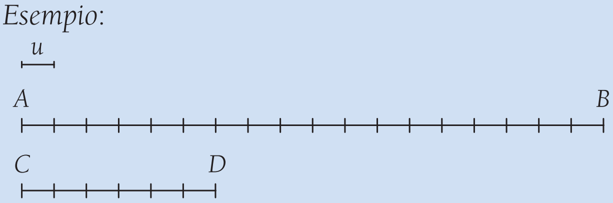
Il **prodotto** di un qualsiasi rapporto per il suo inverso è uguale a 1.

Esempio: $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{2} = 1$

Rapporti tra grandezze

- Il rapporto tra due **grandezze omogenee** è il numero puro uguale al rapporto tra le rispettive misure (riferite alla stessa unità).

  Esempio:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{18}{6} = 3$$

- Il rapporto tra **due grandezze non omogenee** è un'altra grandezza, detta **grandezza derivata**.

  Esempio:
  spazio percorso = 100 km
  tempo impiegato = 1 ora

$$\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \text{velocità} = \frac{100 \text{ km}}{1 \text{ ora}} = 100 \text{ km/h}$$

Proporzioni

La proporzione è l'uguaglianza di due rapporti: $a : b = c : d$.

Esempio: $\dfrac{12}{4} = \dfrac{15}{5}$

12 : 4 = 15 : 5
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
12 sta a 4 come 15 sta a 5

antecedenti
$12 : 4 = 15 : 5$
conseguenti

medi
$12 : 4 = 15 : 5$
estremi

Proporzione continua

Una proporzione continua ha i *medi uguali*.

Esempio:
$12 : 6 = 6 : 3$
medio proporzionale

Proprietà fondamentale delle proporzioni

In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:
se $a : b = c : d$ allora $b \times c = a \times d$

Esempio:

prodotto dei medi

$4 \times 15 = 60$

$12 : 4 = 15 : 5$

$12 \times 5 = 60$

prodotto degli estremi

Risoluzione delle proporzioni con elementi incogniti

Ricerca di un estremo: si divide il prodotto dei medi per l'estremo noto.

Esempio: $7 : 3 = 21 : x \quad x = \dfrac{3 \times 21}{7} = 9$

Ricerca di un medio: si divide il prodotto degli estremi per il medio noto.

Esempio: $7 : x = 21 : 9 \quad x = \dfrac{7 \times 9}{21} = 3$

Ricerca di un medio proporzionale: si estrae la radice quadrata del prodotto degli estremi.

Esempio: $6 : x = x : 24 \quad x = \sqrt{6 \times 24} = 12$

Altre proprietà delle proporzioni

Proprietà dell'invertire

In ogni proporzione scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene ancora una proporzione.

Esempio:

$5 : 15 = 4 : 12$ e $15 : 5 = 12 : 4$

Proprietà del permutare

In ogni proporzione scambiando tra loro i medi, o gli estremi, o entrambi, si ottiene ancora una proporzione:

Esempio:

$$5 : 15 = 4 : 12 \quad \begin{cases} 5 : 4 = 15 : 12 \\ 12 : 15 = 4 : 5 \\ 12 : 4 = 15 : 5 \end{cases}$$

Proprietà del comporre

In ogni proporzione la somma del 1° e del 2° termine sta al primo (o al secondo) come la somma del 3° e del 4° termine sta al terzo (o al quarto).

Esempio:

$5 : 15 = 4 : 12$

$(5 + 15) : 15 = (4 + 12) : 12$

e anche

$(5 + 15) : 5 = (4 + 12) : 4$

Proprietà dello scomporre

In ogni proporzione la differenza tra il 1° e il 2° termine sta al primo (o al secondo) come la differenza tra il 3° e il 4° termine sta al terzo (o al quarto).

Esempio:

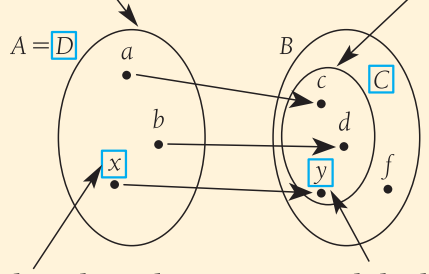
$15 : 5 = 12 : 4$

$(15 - 5) : 5 = (12 - 4) : 4$

Variabili

insieme di partenza: **dominio** (D)

insieme delle immagini: **codominio** (C)



variabile indipendente: è possibile assegnarle qualsiasi valore numerico appartenente all'insieme A

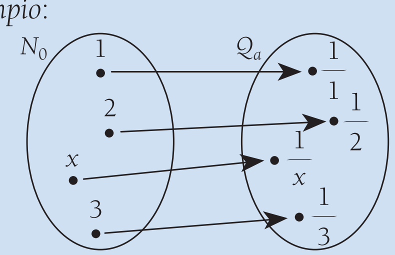
variabile dipendente: (immagine di x) il suo valore dipende dal valore assegnato a x

Funzione

Se A e B sono insiemi numerici, si parla di **funzione** quando:

- a ogni elemento $x \in A$ corrisponde un elemento $y \in B$;
- il valore di y dipende dal valore di x, cioè **y è funzione di x**: $\boldsymbol{y = f(x)}$

Esempio:



A ogni elemento $x \in N_0$ corrisponde un elemento $y \in Q_a$, che è il reciproco di x:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

Funzione matematica
È una funzione che può essere espressa con una formula matematica.

Funzione empirica
È una funzione che non può essere espressa con una formula matematica.

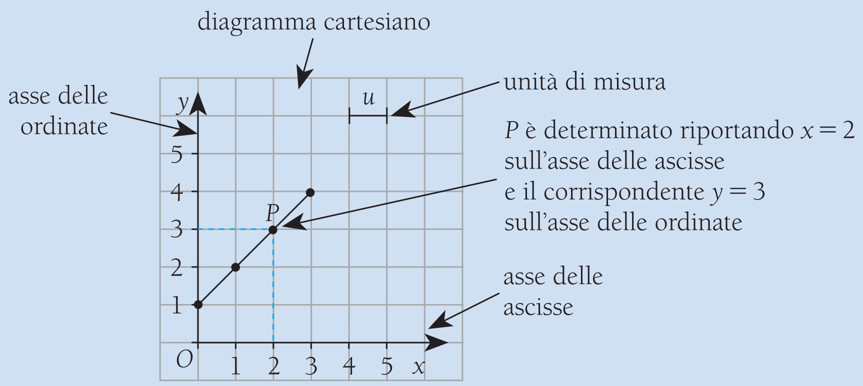
Rappresentazione di una funzione

Una funzione $y = f(x)$ può essere rappresentata con la **tabella dei valori** oppure graficamente in un **sistema di riferimento cartesiano**.

Esempio: $y = x + 1$

Tabella dei valori						
x	0	1	2	…	10	…
y	1	2	3	…	11	…

Rappresentazione grafica



Funzione della proporzionalità diretta

Due grandezze variabili, l'una dipendente dall'altra, si dicono **direttamente proporzionali** quando raddoppiando, triplicando, ... dimezzando ecc. i valori dell'una, i corrispondenti valori dell'altra diventano il doppio, il triplo, ... la metà ecc.

$$y = k \times x$$

Il rapporto tra due qualsiasi valori corrispondenti è costante:

$$\frac{y}{x} = k \quad (k,\ x \neq 0)$$

k è il **coefficiente** (**o la costante**) **di proporzionalità diretta**.

Esempio:

$$y = f(x) = 2x$$

coefficiente di proporzionalità diretta

Funzione della proporzionalità inversa

Due grandezze variabili si dicono **inversamente proporzionali** quando raddoppiando, triplicando, ... i valori dell'una, i corrispondenti valori dell'altra diventano la metà, un terzo ecc.

$$y = k : x \quad (k \neq 0)$$

Il prodotto tra due qualsiasi valori corrispondenti è costante:

$$y \times x = k \quad (k \neq 0)$$

k è il **coefficiente** (**o la costante**) **di proporzionalità inversa**.

Esempio:

$$y = \frac{12}{x}$$

coefficiente di proporzionalità inversa

Grafico della proporzionalità diretta

È una **semiretta uscente dall'origine** degli assi.

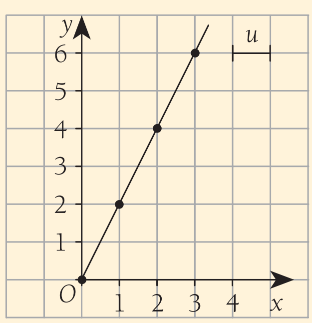
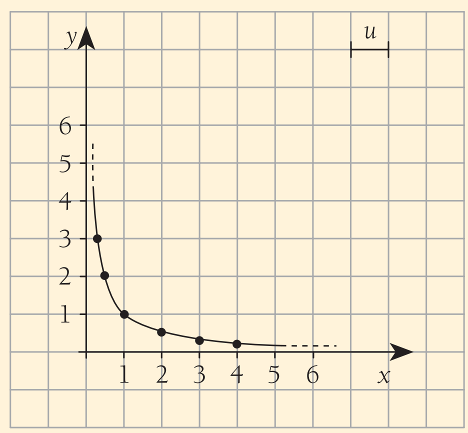


Grafico della proporzionalità inversa

È un **ramo di iperbole equilatera**.



Funzione della proporzionalità quadratica

Se tra due grandezze variabili esiste una **proporzionalità quadratica**, il rapporto tra un qualsiasi valore di una grandezza e il quadrato del corrispondente valore dell'altra è costante:

$$\frac{y}{x^2} = k \quad (k,\ x \neq 0)$$

k è il **coefficiente** (**o la costante**) **di proporzionalità quadratica**.

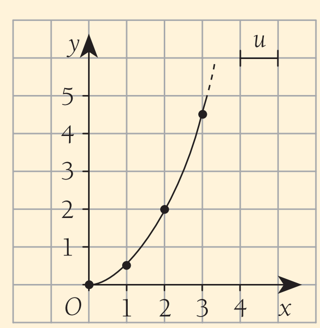
Esempio:

$$y = f(x) = 2x^2$$

coefficiente di proporzionalità quadratica

Grafico della proporzionalità quadratica

È un **ramo di parabola**.



MAPPA 11

Problemi risolvibili con le proporzioni

Problemi del tre semplice

Dati tre valori corrispondenti a grandezze proporzionali, si vuole determinare il quarto valore.

Risoluzione dei problemi del tre semplice diretto

Nei problemi del tre semplice diretto compaiono due grandezze **direttamente proporzionali** e il loro rapporto è costante.

Esempio: Se per due persone occorrono 150 g di spaghetti, quanti spaghetti occorrono per 6 persone?

n° persone	2	→	6
g di spaghetti	150	→	x

↑ **grandezze direttamente proporzionali**

↑ **frecce con stesso verso**

Si scrive la proporzione seguendo il verso delle frecce:

$2 : 6 = 150 : x$

Risoluzione dei problemi del tre semplice inverso

Nei problemi del tre semplice inverso compaiono due grandezze **inversamente proporzionali** e il loro prodotto è costante.

Esempio: Se per eseguire un lavoro 10 operai impiegano 9 giorni, quanti giorni occorrono a 15 operai per eseguire lo stesso lavoro?

n° operai	10	→	15
n° giorni	9	←	x

↑ **grandezze inversamente proporzionali**

↑ **frecce con verso opposto**

Si scrive la proporzione seguendo il verso delle frecce:

$10 : 15 = x : 9$

Problemi del tre composto

Sono problemi di proporzionalità diretta o inversa in cui compaiono tre o più grandezze che si corrispondono a due a due in modo direttamente o inversamente proporzionale. Si possono scindere in due o più problemi del tre semplice.

Problemi di ripartizione

- I problemi di ripartizione **diretta** permettono di ripartire un numero dato in parti **direttamente** proporzionali a più numeri assegnati.
- I problemi di ripartizione **inversa** permettono di ripartire un numero dato in parti **inversamente** proporzionali a più numeri assegnati. Per risolvere i problemi di ripartizione inversa, si ripartisce il numero dato in parti direttamente proporzionali agli inversi dei numeri assegnati.

MAPPA 12 Introduzione alla statistica e alla probabilità

Che cos'è la statistica

La **statistica** è la scienza che studia i **fenomeni collettivi** composti da molti fatti singoli, le **unità statistiche**, sui quali si possono eseguire misurazioni.
I fenomeni studiati riguardano una **popolazione statistica** (o **universo statistico**).
La statistica può **descrivere** una popolazione che ha caratteri comuni oppure ricavare **previsioni** sull'andamento di un fenomeno.

Indagini statistiche

La statistica basa i suoi studi e le sue ricerche sulle **indagini statistiche**. In una indagine statistica il fenomeno che si vuole studiare è indicato da una o più **variabili statistiche**, che rappresentano un **carattere** della popolazione statistica. Una variabile si può manifestare con **modalità** diverse in una popolazione.
Esempio:
Indagine statistica sul tipo di sport praticato dagli alunni della tua classe.

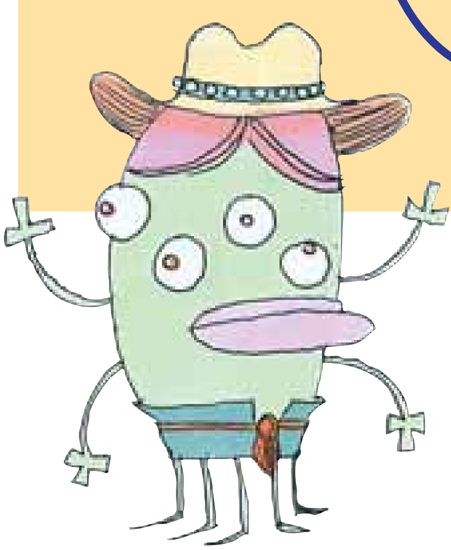
alunni della classe	ogni alunno	tipo di sport praticato	basket, pallavolo...
↑	↑	↑	↑
popolazione statistica	unità statistica	variabile statistica	modalità

Variabili qualitative e quantitative
Una variabile statistica può essere:
- di tipo **qualitativo**, quando è espressa in forma verbale;

Esempio: "Il colore degli occhi degli individui di un gruppo di persone"

- di tipo **quantitativo**, quando è espressa con un numero.

Esempio: "La statura degli individui di un gruppo di persone"



Fasi di una indagine statistica

Per effettuare una indagine statistica è necessario seguire una procedura ben precisa, distinta in tre fasi fondamentali: **rilevazione dei dati**, **elaborazione dei dati**, **rappresentazione grafica dei dati**.

Rilevazioni dei dati

Fase in cui si **raccolgono** le informazioni relative al fenomeno da studiare.
In questa fase è importante:

- stabilire lo **strumento** per raccogliere i dati (questionari, interviste ecc.);
- individuare la **popolazione statistica** da esaminare.

Elaborazione dei dati

Fase in cui i dati vengono **elaborati** con formule matematiche che permettono di **analizzare** il fenomeno.

Frequenza assoluta e relativa

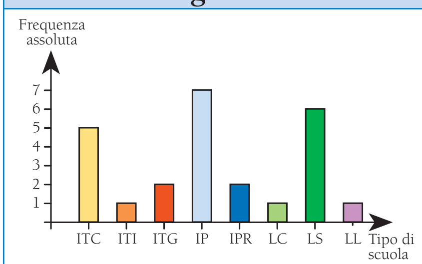
La **frequenza assoluta** (f) di una modalità è il numero di volte in cui tale modalità si è presentata nella rilevazione.
La **frequenza relativa** (F) di una modalità è il rapporto tra la frequenza assoluta (f) di tale modalità e il numero totale (n) delle unità statistiche:

$$F = \frac{f}{n}$$

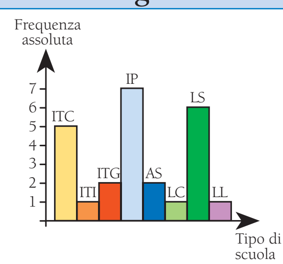
Rappresentazione grafica dei dati

Fase in cui i dati vengono **rappresentati con grafici** che permettono una **visualizzazione** immediata del fenomeno.

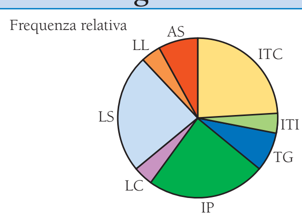
Ortogramma



Istogramma



Areogramma



L'ampiezza α di ogni settore circolare è direttamente proporzionale alla percentuale che rappresenta:

$\alpha : x = 360 : 100$

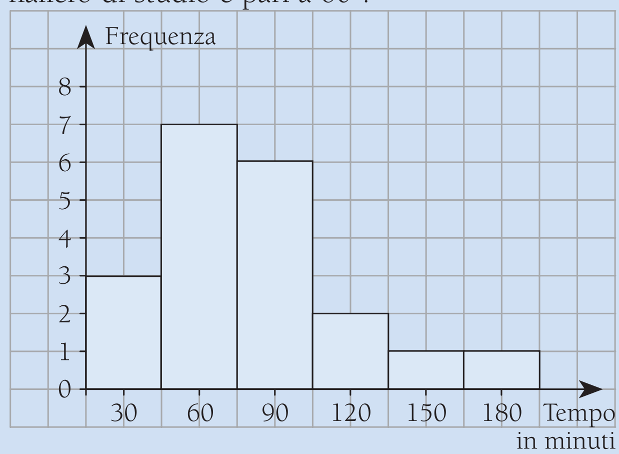
Interpretazione dei dati

Per interpretare dati si ricorre spesso ad alcuni **valori medi** particolarmente significativi: la **media aritmetica**, la **moda** e la **mediana**.

Moda

In un insieme di dati, la moda è il valore (o i valori) che si presenta (presentano) con la massima frequenza.

Esempio:
Nella classe di Marco la moda relativa al tempo giornaliero di studio è pari a 60′.



Mediana

Valore che occupa la **posizione centrale** in una successione di dati posti in ordine crescente o decrescente.

Esempio:
38 38 38 $\boxed{39}$ 40 42 43
La mediana è 39.

Media aritmetica

Valore che si ottiene dividendo la somma dei valori di tutti i dati statistici ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) per il loro numero ($n$).
È espressa dalla formula:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Esempio:

	Anna	Maria	Luca	Antonella	Omar	Damiano
Peso (in kg)	38	42	38	43	38	40

$$M = \frac{38 + 42 + 38 + 43 + 38 + 40}{6}\ \text{kg} = 39{,}8\ \text{kg}$$

La media aritmetica è 39,8 kg.

La media aritmetica ponderata

La media aritmetica può essere calcolata anche moltiplicando i diversi valori registrati ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) per le corrispondenti frequenze ($f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$) e poi dividendo per la somma delle diverse frequenze.
Tale media è detta ponderata ed è espressa dalla formula:

$$M = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

Probabilità classica

La probabilità di un evento è data dal **rapporto** tra il numero dei **casi favorevoli** al verificarsi dell'evento e il numero dei **casi possibili** (che devono essere tutti ugualmente possibili). Riferendoci ad un evento E in simboli si scrive:

$$\boldsymbol{P(E) = \frac{f}{p}}$$

$f \rightarrow$ numero dei casi **favorevoli** al verificarsi dell'evento E
$p \rightarrow$ numero dei casi **possibili** ($p \neq 0$)

La probabilità di un evento può essere espressa in frazioni, in numero decimale o in percentuale:

- se $f = p$, ovvero tutti i casi sono favorevoli, allora $P(E) = \dfrac{f}{p} = 1$: l'evento è *certo*;
- se $f = 0$, ovvero nessun caso è favorevole, allora $P(E) = \dfrac{f}{p} = 0$: l'evento è *impossibile*;
- se $0 < f < 1$, ovvero alcuni casi sono favorevoli, allora $0 < P(E) < 1$: l'evento è *aleatorio*.

Esempio
La probabilità che, lanciando un dado, esca una faccia contrassegnata:

- da un numero compreso fra 1 e 6: $\dfrac{f}{p} = \dfrac{6}{6} = 1$ (evento certo);
- con il numero 7: $\dfrac{f}{p} = \dfrac{0}{6} = 0$ (evento impossibile);
- con il numero 5: $\dfrac{f}{p} = \dfrac{1}{6} = 0$ (evento aleatorio).

Probabilità statistica

La probabilità statistica (o frequentistica) di un evento è data dalla sua frequenza relativa, se il numero di prove effettuato è "sufficientemente" alto:

$$\boldsymbol{F(E) = \frac{f}{n}}$$

dove:

- $F(E)$: frequenza relativa di un evento;
- f: numero delle volte in cui l'evento si è verificato;
- n: numero delle prove eseguite.

Si tratta di quella che viene anche detta **legge dei grandi numeri** o **legge empirica** (cioè sperimentale) **del caso**: la frequenza relativa di un evento tende ad avvicinarsi alla sua probabilità quando si effettua un grande numero di prove, tutte eseguite nelle stesse condizioni.