MAPPA 1

Strumenti e rappresentazioni grafiche

Tabella a doppia entrata

Una tabella a doppia entrata è formata da righe e colonne. Per convenzione, si legge in senso orario (nel verso indicato dalla freccia).

Esempio:

colonna ↓

riga →

	a	*b*	*c*	*d*
1	1; *a*			
2		2; *b*		
3			3; *c*	
4				4; *d*

Coppia ordinata
Una coppia di simboli si dice ordinata quando è elencata con un ordine assegnato.

Esempi:
(1; *a*), (2; *b*), (3; *c*), (4; *d*).

Istogramma

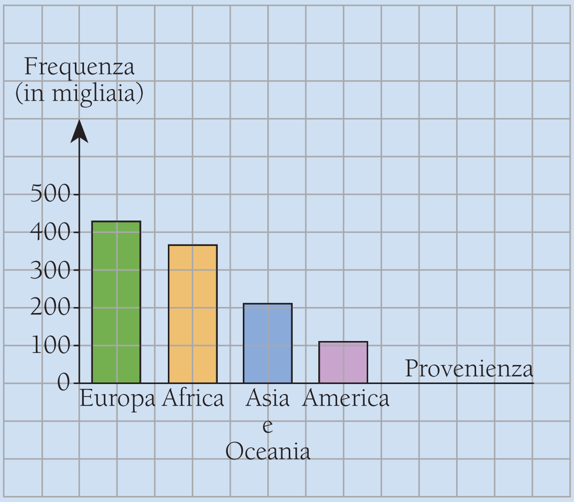
Grafico costituito da rettangoli aventi la stessa base e l'altezza determinata dal numero che indica la frequenza di quel dato.

Esempio:

Tabella delle frequenze

Provenienza	Numero di persone (in migliaia)
Europa	428
Africa	366
Asia e Oceania	211
America	109

↑
frequenza



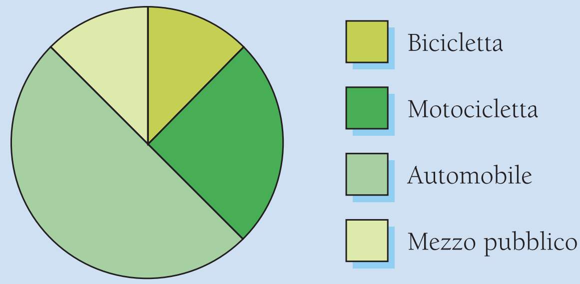
Frequenza
È il numero di volte in cui si presenta ogni dato.

Areogramma

Grafico che viene utilizzato quando si vuole confrontare il "tutto" (il 100%) con le sue "parti".

Esempio:

Mezzo di trasporto utilizzato	% di persone
Bicicletta	**12,5**
Motocicletta	**25**
Automobile	**50**
Mezzo pubblico	**12,5**



Ideogramma

Grafico che utilizza un simbolo per rappresentare l'oggetto preso in esame dall'indagine.

Esempio:

Anno scolastico	Numero alunni
2003	750
2004	800
2005	1100

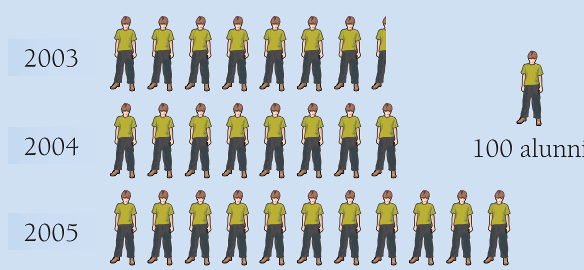
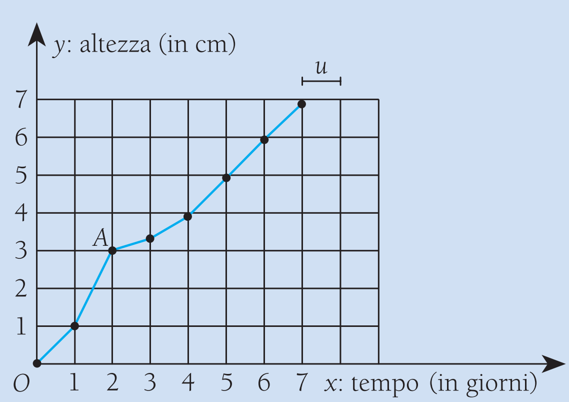


Diagramma cartesiano

Grafico che esprime l'andamento del fenomeno che si sta analizzando e che utilizza un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale**.

Esempio:



Coordinate cartesiane

Un punto nel piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata di numeri, che si dicono coordinate cartesiane di quel punto.
Il primo numero è l'**ascissa**, il secondo l'**ordinata**.

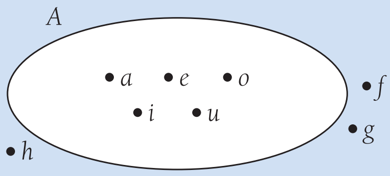
Esempio: $C(3;\ 5)$

ascissa **ordinata**

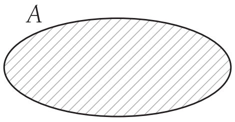
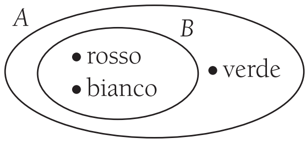
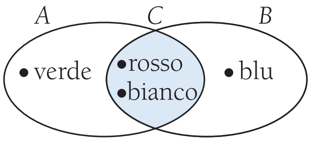
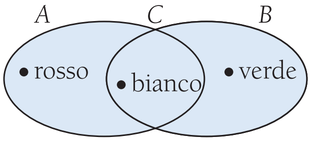
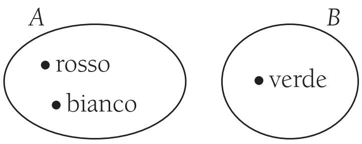
I diagrammi di Eulero-Venn

Per rappresentare un insieme i matematici utilizzano diversi metodi; tra questi vi è la rappresentazione grafica con i diagrammi di Eulero-Venn.

- Un insieme si indica con le lettere maiuscole dell'alfabeto.
- Gli elementi dell'insieme si indicano con il loro nome per esteso o con il loro simbolo.



Simbologia

Insieme vuoto	$A = \{\} = \varnothing$ A è un insieme vuoto cioè privo di elementi	
Sottoinsieme di un insieme $\subset$	$A =$ **{rosso, bianco, verde}** $B =$ **{rosso, bianco}** $B \subset A$ B è incluso in A	
Intersezione di insiemi $\cap$	$A =$ **{rosso, bianco, verde}** $B =$ **{rosso, bianco, blu}** $C = A \cap B =$ **{rosso, bianco}** C è l'intersezione di A e B	
Unione di insiemi $\cup$	$A =$ **{rosso, bianco}** $B =$ **{bianco, verde}** $C = A \cup B =$ **{rosso, bianco, verde}** C è l'unione di A e B	
Insiemi disgiunti	$A =$ **{rosso, bianco}** $B =$ **{verde}** $C = A \cap B = \{\} = \varnothing$ L'intersezione di due insiemi disgiunti è un insieme vuoto	

Simbologia

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$a \in A$: l'elemento a **appartiene** all'insieme A

$g \notin A$: l'elemento g **non appartiene** all'insieme A

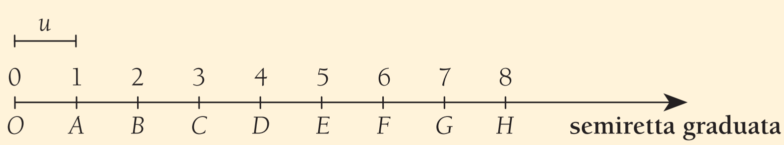
MAPPA 2

I numeri: naturali, decimali, interi relativi

L'insieme N dei numeri naturali

- L'insieme *N* dei numeri naturali è un insieme **infinito**.
- Ogni numero naturale ha sempre un numero naturale *successivo* e, tranne lo zero, un numero naturale *precedente*: possiamo quindi costruire una successione infinita di numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, ...
- L'insieme dei numeri naturali è un insieme **ordinato**: ogni numero infatti ha una collocazione precisa tra il precedente e il successivo.

Rappresentazione grafica dei numeri naturali



Confronto fra numeri naturali

- Due numeri naturali sono **uguali** quando occupano la stessa posizione nella successione dei numeri naturali.
- Due numeri naturali sono **disuguali** quando non occupano la stessa posizione nella successione dei numeri naturali.
- Ogni numero naturale, diverso da zero, è **maggiore** dei numeri che lo precedono nella successione dei numeri naturali e **minore** di quelli che lo seguono.

Simboli

$a = b$ *a* è uguale a *b*.
$a \neq b$ *a* è diverso da *b*.
$a < b$ *a* è minore di *b*.
$a > b$ *a* è maggiore di *b*.
$a \leq b$ *a* è minore o uguale a *b*.
$a \geq b$ *a* è maggiore o uguale a *b*.

Numeri cardinali e numeri ordinali

Il numero **cardinale** indica la quantità di elementi di un insieme finito, il numero **ordinale** indica la posizione occupata da un elemento in un insieme ordinato.

Numero ordinale

In parola	In cifre arabe	In cifre romane
primo	1°	I
secondo	2°	II
terzo	3°	III
quarto	4°	IV
decimo	10°	X

Sistema di numerazione decimale posizionale

Per leggere e scrivere i numeri naturali utilizziamo il sistema di numerazione decimale posizionale.

Un sistema di numerazione è:

- **decimale** quando dieci unità di qualsiasi ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore;
- **posizionale** quando il valore di una cifra dipende dalla posizione che essa occupa in un numero.

Esempio:

Il numero 485 072 361 può essere rappresentato nel seguente modo:

Milioni			Migliaia			Unità		
centinaia di milioni	decine di milioni	milioni	centinaia di migliaia	decine di migliaia	migliaia	centinaia	decine	unità
4	8	5	0	7	2	3	6	1
9° ordine	8° ordine	7° ordine	6° ordine	5° ordine	4° ordine	3° ordine	2° ordine	1° ordine

Forma posizionale e forma polinomiale

La scrittura di un numero può essere in forma:

	posizionale				polinomiale
	m	c	d	u	
318		3	1	8	$3 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1$
4751	4	7	5	1	$4 \times 1000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 1 \times 1$

I numeri decimali

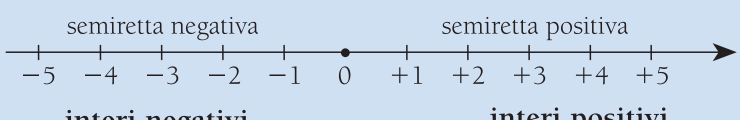
I numeri decimali sono formati:

- da una parte intera che precede la virgola;
- una parte decimale che segue la virgola.

Parte intera → $\boxed{3}$, $\boxed{12}$ ← **Parte decimale**

Unità	Decimo	Centesimo	Millesimo	Decimillesimo	Centomillesimo
1	**0,1**	**0,01**	**0,001**	**0,0001**	**0,00001**
Unità di 1° ordine	Unità decimale di 1° ordine	Unità decimale di 2° ordine	Unità decimale di 3° ordine	Unità decimale di 4° ordine	Unità decimale di 5° ordine

I numeri interi relativi



MAPPA 3

I numeri naturali e le quattro operazioni

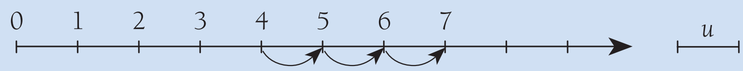
Addizione

Operazione che associa a due numeri, gli **addendi**, un terzo numero, la **somma**.

Esempio: $4 + 3 = 7$

$\uparrow\ \uparrow\ \nwarrow$

addendi **somma**



Proprietà commutativa

La somma non cambia se si cambia l'ordine degli addendi:

$$a + b = b + a$$

Esempio: $5 + 2 = 2 + 5 = 7$

Proprietà associativa

La somma di tre o più addendi non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma:

$$a + b + c = (a + b) + c =$$
$$= a + (b + c)$$

Esempio: $\underbrace{7 + 3} + 5 =$

$$= 10 + 5 = 15$$

Elemento neutro

Lo zero è l'elemento neutro dell'addizione; se uno dei due addendi è zero, la somma è uguale all'altro addendo:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Esempio: $5 + 0 = 0 + 5 = 5$

Moltiplicazione

Operazione che associa a due numeri, i **fattori**, un terzo numero, il **prodotto**, ottenuto addizionando tanti addendi uguali al primo numero quante sono le unità del secondo.

Esempio: $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$

$\uparrow\ \uparrow\ \qquad \uparrow$

fattori **prodotto**

Proprietà commutativa

Il prodotto non cambia se si cambia l'ordine dei fattori:

$$a \times b = b \times a$$

Esempio: $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$

Proprietà associativa

Il prodotto di tre o più fattori non cambia se a due o più di essi si sostituisce il loro prodotto:

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c =$$
$$= a \times (b \times c)$$

Esempio: $\underbrace{5 \times 2} \times 3 =$

$$= 10 \times 3 = 30$$

Elemento neutro

Il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione; se uno dei due fattori è 1, il prodotto è uguale all'altro fattore:

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Esempio: $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$

Elemento assorbente

Il numero 0 è l'elemento assorbente della moltiplicazione; se uno dei due fattori è 0, il prodotto è uguale a 0:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

Esempio: $5 \times 0 = 0 \times 5 = 0$

Sottrazione

Operazione che associa a due numeri a, b, con $a \geq b$, quel numero c (**differenza**) che addizionato a b dà a:

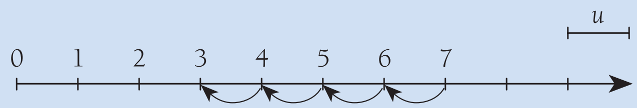
$a - b = c$ perché $c + b = a$

$a \xrightarrow{-b} c$, $c \xrightarrow{b+} a$

Esempio: $7 - 4 = 3$

$7 \xrightarrow{-4} 3$, $3 \xrightarrow{4+} 7$

minuendo **sottraendo** **differenza**



Proprietà invariantiva

La differenza tra due numeri non cambia se si addiziona o si sottrae uno stesso numero al minuendo e al sottraendo:

$a - b = (a + m) - (b + m)$

$a - b = (a - n) - (b - n)$

Esempio: $7 - 2 = (7 + 3) - (2 + 3) = 10 - 5 = 5$

$7 - 2 = (7 - 1) - (2 - 1) = 6 - 1 = 5$

Divisione

Operazione che associa a due numeri a, b, con $b \neq 0$, quel numero c (**quoziente**) che moltiplicato per b dà a:

$a : b = c$ perché $c \times b = a$

$a \xrightarrow{:b} c$, $c \xrightarrow{b\times} a$

Esempio: $14 : 2 = 7$

$14 \xrightarrow{:2} 7$, $7 \xrightarrow{2\times} 14$

dividendo **divisore** **quoziente**

Proprietà invariantiva

Moltiplicando o dividendo il dividendo e il divisore per uno stesso numero diverso da 0, il quoziente non cambia:

$a : b = (a \times m) : (b \times m)$

$a : b = (a : n) : (b : n)$

Esempio: $80 : 40 = (80 \times 2) : (40 \times 2) = 160 : 80 = 2$

$80 : 40 = (80 : 10) : (40 : 10) = 8 : 4 = 2$

La divisione e il numero 0

- Se il dividendo è 0 e il divisore è $\neq 0$, il quoziente è **0**:
  $0 : a = 0$
- Se dividendo e divisore sono entrambi 0, il quoziente è **indeterminato**.
- Se il dividendo è $\neq 0$ e il divisore è 0, la divisione è **impossibile**.

Divisioni improprie

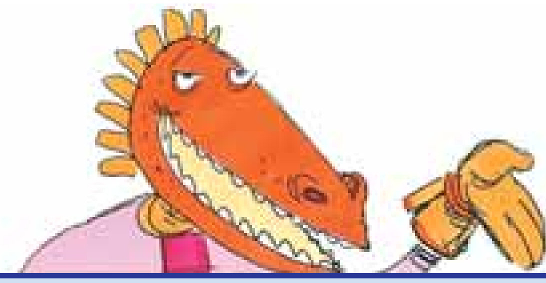
Le divisioni con quoziente approssimato si chiamano **divisioni improprie** e hanno un resto:

resto = dividendo − (divisore × quoziente approssimato)

Esempio: $17 : 3 = 5$ con resto 2 infatti $17 = 5 \times 3 + 2$

quoziente approssimato **resto**

NUMERI



Proprietà distributiva

La proprietà distributiva lega tra loro le quattro operazioni.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e alla sottrazione

Per moltiplicare un numero per una somma (o una differenza), si può moltiplicare ogni termine dell'addizione (o della sottrazione) per quel numero e addizionare (o sottrarre) i prodotti ottenuti:

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$

Esempi:

$5 \times (2 + 4) = 5 \times 2 + 5 \times 4 = 10 + 20 = 30$

$5 \times (4 - 2) = 5 \times 4 - 5 \times 2 = 20 - 10 = 10$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione

Per dividere una somma (o una differenza) per un numero diverso da 0, si può dividere ogni termine dell'addizione (o della sottrazione) per quel numero e addizionare (o sottrarre) i quozienti ottenuti:

$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$

$(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$

Esempi:

$(6 + 4) : 2 = 6 : 2 + 4 : 2 = 3 + 2 = 5$

$(6 - 4) : 2 = 6 : 2 - 4 : 2 = 3 - 2 = 1$

Espressioni

Per risolvere un'espressione le operazioni devono essere eseguite rispettando un ordine preciso:

1) prima le operazioni in parentesi **tonda**;
2) poi le operazioni in parentesi **quadra**;
3) infine le operazioni in parentesi **graffa**.

All'interno della stessa parentesi si eseguono prima **moltiplicazioni** e **divisioni** (nell'ordine in cui sono scritte) e poi **addizioni** e **sottrazioni** (nell'ordine in cui sono scritte).

$\{a + [(b + c \times d) - e : f] \times g\} - h$

risultato

MAPPA 4

Un'altra operazione: l'elevamento a potenza

Elevamento a potenza

Operazione che associa a due numeri, **base** ed **esponente**, un terzo numero, detto **potenza**, che è il prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ volte}}$$

Esempio:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \longleftarrow \textbf{potenza}$$

base **esponente**

Casi particolari

- Una potenza con **esponente 1** è sempre uguale alla propria base:
  $a^1 = a$

  Esempio: $3^1 = 3$
- Una potenza con **esponente 0** è sempre uguale a 1:
  $a^0 = 1$

  Esempio: $5^0 = 1$
- La scrittura $\mathbf{0^0}$ non ha significato.

Proprietà delle potenze

Prodotto di potenze con la stessa base

Il prodotto di due o più potenze con la stessa base è una potenza che ha:

– per base la stessa base;

– per esponente la **somma** degli esponenti.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

Esempio:

prodotto delle potenze

$$\overline{2^3 \times 2^5} = 2^{3+5} \longleftarrow \textbf{somma degli esponenti}$$

stessa base

Quoziente di potenze con la stessa base

Il quoziente di due o più potenze con la stessa base è una potenza che ha:

– per base la stessa base;

– per esponente la **differenza** degli esponenti.

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Esempio:

quoziente delle potenze

$$\overline{8^{10} : 8^3} = 8^{10-3} \longleftarrow \textbf{differenza degli esponenti}$$

stessa base

Estrazione di radice

Operazione inversa dell'elevamento a potenza.
In particolare:

- estrarre la **radice quadrata** di un numero significa determinare quel numero che elevato al quadrato dà il numero di partenza;
- estrarre la **radice terza** di un numero significa determinare quel numero che elevato alla terza dà il numero di partenza.

Esempi:

$\sqrt[2]{25} = 5$ perché $5^2 = 25$

$$5 \underset{\sqrt[2]{\ }}{\overset{(\ )^2}{\rightleftarrows}} 25$$

$\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$

$$2 \underset{\sqrt[3]{\ }}{\overset{(\ )^3}{\rightleftarrows}} 8$$

Potenza di potenza

La potenza di una potenza è una potenza che ha:
– per base la stessa base;
– per esponente il **prodotto** degli esponenti.
$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Esempio:

potenza della potenza

$$\overbrace{(3^5)^2} = 3^{5 \times 2} \longleftarrow \textbf{prodotto degli esponenti}$$

stessa base

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

Il prodotto di due o più potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha:
– per base il **prodotto** delle basi;
– per esponente lo stesso esponente.
$a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Esempio:

stesso esponente

$$\underbrace{2^3 \times 4^3}_{\textbf{prodotto delle potenze}} = \underbrace{(2 \times 4)^3}_{\textbf{prodotto delle basi}}$$

Quoziente di potenze con lo stesso esponente

Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha:
– per base il **quoziente** delle basi;
– per esponente lo stesso esponente.
$a^n : b^n = (a : b)^n$

Esempio:

stesso esponente

$$\underbrace{16^3 : 8^3}_{\textbf{quoziente delle potenze}} = \underbrace{(16 : 8)^3}_{\textbf{quoziente delle basi}}$$

MAPPA 5

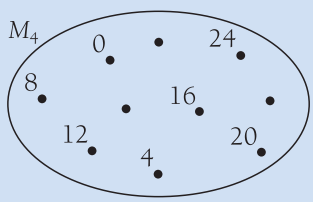
La divisibilità

Multipli di un numero

I multipli di un numero n si ottengono moltiplicando n per 0, 1, 2, ...

Esempio:

0 è multiplo di 4 secondo 0	$0 \times 4 = 0$
4 è multiplo di 4 secondo 1	$1 \times 4 = 4$
8 è multiplo di 4 secondo 2	$2 \times 4 = 8$ ⟵ il **doppio**
12 è multiplo di 4 secondo 3	$3 \times 4 = 12$ ⟵ il **triplo**
...	$... \times 4 = ...$



L'insieme dei multipli di un numero

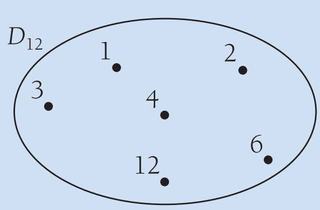
- L'insieme dei multipli di un numero naturale $n \neq 0$ è un **insieme infinito**.
- L'insieme dei multipli di 0 è costituito solo dallo 0: è un **insieme singolo**.

Divisori di un numero

I divisori di un numero n ($n \neq 0$) sono i numeri che dividono n esattamente (cioè con resto 0).

Esempio:

1 è divisore di 12	$12 : 1 = 12$
2 è divisore di 12	$12 : 2 = 6$
3 è divisore di 12	$12 : 3 = 4$
4 è divisore di 12	$12 : 4 = 3$
6 è divisore di 12	$12 : 6 = 2$
12 è divisore di 12	$12 : 12 = 1$



L'insieme dei divisori di un numero

- L'insieme dei divisori di un numero naturale $n \neq 0$ è un **insieme finito**.
- L'insieme dei divisori di 0 è un **insieme infinito** perché il quoziente fra 0 e un qualsiasi numero naturale $n \neq 0$ è 0.

Lo zero non è mai divisore

Il numero 0 non è divisore di alcun numero naturale perché $n : 0$ è impossibile.

Criteri di divisibilità

Un numero naturale è **divisibile** per un altro numero naturale diverso da 0 se esso ne è **multiplo**, cioè se esiste un altro numero che, moltiplicato per il secondo, dà il primo.

Un numero è divisibile per...	se...
2	termina con cifra pari
4	termina con due zeri o con due cifre che costituiscono un multiplo di 4
5	termina con 5 o con zero
25	termina con 25, 50, 75 o due zeri
10	termina con almeno uno zero
100	termina con almeno due zeri
1000	termina con almeno tre zeri
3	la somma delle sue cifre è un multiplo di 3
9	la somma delle sue cifre è un multiplo di 9
11	la differenza fra la somma delle cifre di posto “dispari” e quella delle cifre di posto “pari” è 0 o un multiplo di 11

Numeri primi

Numeri naturali maggiori di 1 che hanno per divisori soltanto 1 e se stessi.

I numeri primi minori di 100				
2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Numeri composti e fattorizzazione

Un numero naturale maggiore di 1 che non è primo si dice **composto**. Qualunque numero composto si può scrivere come prodotto di numeri primi; la scomposizione ottenuta si chiama **fattorizzazione** ed è unica.

Esempio:

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 162 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^4$$

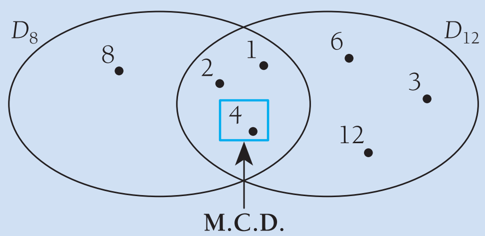
Fattorizzazione e divisibilità
Se scomponendo due numeri naturali in fattori primi il primo numero contiene ogni fattore del secondo con esponente uguale o maggiore, allora il primo numero è divisibile per il secondo.

Divisori comuni e M.C.D.

Dati gli insiemi D_a e D_b dei divisori di due numeri naturali a e b, l'insieme dei **divisori comuni** a tali numeri è la loro intersezione $D_a \cap D_b$.

Il maggiore degli elementi dell'intersezione di D_a e D_b è il **Massimo Comun Divisore** di a e b, cioè il maggiore tra i divisori comuni ai due numeri: M.C.D. (a, b).

Esempio: M.C.D. $(8, 12) = 4$



Ricerca del M.C.D. con la scomposizione in fattori primi

Il M.C.D. di due numeri naturali scomposti in fattori primi si ottiene moltiplicando i fattori primi comuni, presi una volta sola, con il minimo esponente.

Esempio: $12 = 2^2 \times 3$

$8 = 2^3$

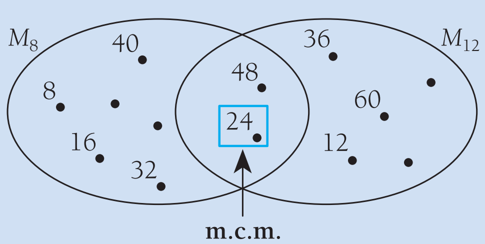
M.C.D. $(12, 8) = 2^2$

Multipli comuni e m.c.m.

Dati gli insiemi M_a e M_b dei multipli di due numeri naturali a e b, l'insieme dei **multipli comuni** a tali numeri è la loro intersezione $M_a \cap M_b$.

Il minore degli elementi dell'intersezione di M_a e M_b è il **minimo comune multiplo** di a e b, cioè il minore tra i multipli comuni ai due numeri: m.c.m. (a, b).

Esempio: m.c.m. $(8, 12) = 24$



Ricerca del m.c.m. con la scomposizione in fattori primi

Il m.c.m. di due numeri naturali scomposti in fattori primi si ottiene moltiplicando tutti i fattori primi comuni e non comuni, presi una volta sola, con il massimo esponente.

Esempio: $30 = 2 \times 3 \times 5$

$9 = 3^2$

m.c.m. $(30, 9) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

NUMERI

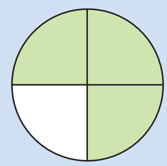
MAPPA 6 Le frazioni e i numeri razionali assoluti

Frazioni

Una qualsiasi frazione si può indicare come $\frac{m}{n}$, dove m e n sono numeri naturali (con $n \neq 0$).

Esempio:

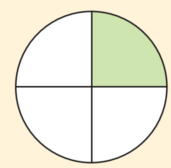
$\frac{3}{4}$ ← **numeratore** (3), ← **linea di frazione**, ← **denominatore** (4)



Unità frazionaria

Rappresenta una sola delle parti in cui è stato diviso l'intero.

Esempio: $\frac{1}{4}$ = unità frazionaria



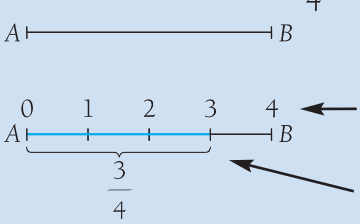
Frazione come operatore

Le frazioni, come i numeri naturali, operano su grandezze o quantità di oggetti (un segmento, un pacchetto di cioccolatini, un numero).

Una frazione $\frac{m}{n}$ è un operatore sull'intero che permette di dividerlo in n parti uguali (tante quante ne indica il denominatore) e di prenderne m (tante quante ne indica il numeratore).

Esempio:

Operare con la frazione $\frac{3}{4}$ su un segmento AB significa:



dividere il segmento in **4 parti uguali** e poi prendere in considerazione **3 parti**

Frazione come quoziente

Una frazione $\frac{m}{n}$ può essere considerata anche come quoziente della divisione tra numeratore e denominatore: $m : n$.

Esempi:

$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$ $\quad$ $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ $\quad$ $\frac{6}{2} = 6 : 2 = 3$

Numero decimale

Qualsiasi frazione $\frac{m}{n}$ può essere scritta sotto forma di numero decimale o di numero intero calcolando il quoziente tra numeratore e denominatore.

Frazioni proprie

Una frazione $\frac{n}{m}$ con $n < m$ si dice **propria** perché rappresenta una parte dell'intero.

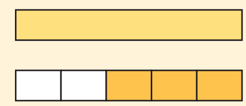
Esempio:

$\frac{3}{4}$ frazione propria perché $3 < 4$

Numeri minori di 1

Le frazioni proprie esprimono sempre un numero minore di 1.

Esempio: $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6 < 1$



1

$\frac{3}{5}$

Frazioni improprie

Una frazione $\frac{n}{m}$ con $n > m$ si dice **impropria.**

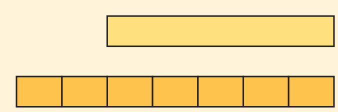
Esempio:

$\frac{6}{4}$ frazione impropria perché $6 > 4$

Numeri maggiori di 1

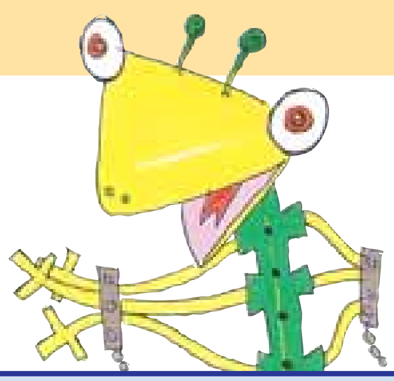
Le frazioni improprie esprimono sempre numeri maggiori o uguali a 1.

Esempio: $\frac{7}{5} = 7 : 5 = 1{,}4 > 1$



1

$\frac{7}{5}$



Frazioni apparenti

Una frazione impropria con il numeratore multiplo del denominatore si dice **apparente**.

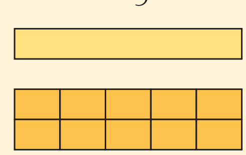
Esempio:

$\frac{12}{4}$ frazione apparente perché $12 = 3 \times 4$

Numeri naturali

Le frazioni apparenti hanno questo nome perché "appaiono" come frazioni, ma in realtà esprimono numeri naturali.

Esempio: $\frac{10}{5} = 10 : 5 = 2$



1

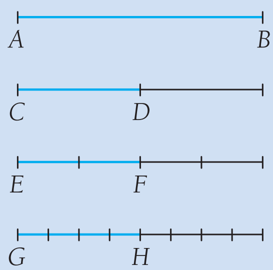
$\frac{10}{5}$

Frazioni equivalenti

Due o più frazioni si dicono **equivalenti** se applicate a uno stesso intero danno lo stesso risultato, oppure se calcolando il quoziente tra numeratore e denominatore si ottiene lo stesso numero.

Esempio:

Le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ sono equivalenti. Infatti, applicate ad AB rappresentano la stessa parte dell'intero:



$CD = \frac{1}{2}AB$

$EF = \frac{2}{4}AB$

$GH = \frac{4}{8}AB$

Calcolando il quoziente tra numeratore e denominatore si ottiene lo stesso numero:

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5 \qquad \frac{2}{4} = 2 : 4 = 0{,}5 \qquad \frac{4}{8} = 4 : 8 = 0{,}5$

Classi di equivalenza

L'insieme di tutte le frazioni tra loro equivalenti si chiama classe di equivalenza.

Esempio:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{18}{36}, \ldots$

L'insieme Q_a

Ogni classe di equivalenza individua un **numero razionale assoluto**. L'insieme dei numeri razionali assoluti si indica con Q_a.

Proprietà fondamentale delle frazioni (proprietà invariantiva)

Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una frazione per lo stesso numero diverso da 0 si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

Esempio:

$\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{\frac{4}{6} = \frac{8}{12}}} \qquad \underset{:2}{\overset{:2}{\frac{4}{6} = \frac{2}{3}}} \qquad \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{\frac{4}{6} = \frac{12}{18}}}$

Riduzione di una frazione ai minimi termini

Dividendo numeratore e denominatore per il loro M.C.D. si ottengono due numeri primi fra loro. Le frazioni così ottenute si dicono ridotte ai minimi termini.

Esempio:

$\underset{:5}{\overset{:5}{\frac{15}{20} = \frac{3}{4}}} \qquad \text{M.C.D.}\ (15, 20) = 5$

Minimo comune denominatore

Per operare con le frazioni è spesso necessario trasformarle in frazioni con ugual denominatore, per comodità il più piccolo: il **minimo comune denominatore**.
Il minimo comune denominatore tra due o più frazioni è il minimo comune multiplo dei denominatori.

Riduzione di più frazioni al minimo comune denominatore

Operazioni da eseguire:

1) calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori;
2) dividiamo il m.c.m. per il denominatore della prima frazione;
3) moltiplichiamo il quoziente ottenuto per i termini della prima frazione;
4) ripetiamo le operazioni 2) e 3) per le altre frazioni.

Esempio: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$

1) m.c.m. $(4, 3) = 12$

2) $12 : 4 = 3$

3) $\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{12}$

4) $\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 4} \frac{8}{12}$

Confronto di frazioni

Per confrontare due frazioni possiamo operare in due modi:

- confrontando i quozienti ottenuti dividendo il numeratore per il denominatore di ogni frazione;
- riducendo le frazioni al minimo comune denominatore e confrontando i numeratori.

Esempio:

$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$

$\frac{21}{35} < \frac{25}{35}$

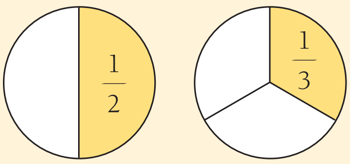
$0,6 < 0,7$

Confronto fra unità frazionarie

Tra due unità frazionarie è maggiore quella che ha denominatore minore.

Esempio:

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$



MAPPA 7

Le operazioni tra i numeri razionali assoluti

Addizione

- La somma di due o più frazioni **con lo stesso denominatore** è la frazione avente per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma dei numeratori.

Esempio:

somma dei numeratori

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$$

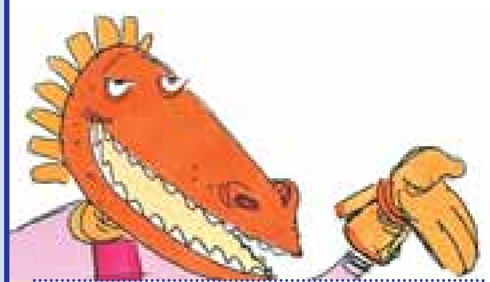
stesso denominatore

- Per addizionare due o più frazioni **con diverso denominatore** si riducono le frazioni al minimo comune denominatore, poi si addizionano tra loro i rispettivi numeratori.

Esempio:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{4}=\frac{12}{20}+\frac{35}{20}=\frac{12+35}{20}=\frac{47}{20}$$

diverso denominatore **minimo comune denominatore**



Proprietà dell'addizione in Q_a

- Proprietà commutativa.
- Proprietà associativa.
- Elemento neutro (0).

Sottrazione

- La differenza tra due frazioni **con lo stesso denominatore** è la frazione avente per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la differenza dei numeratori.

Esempio:

differenza dei numeratori

$$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{7-2}{3}=\frac{5}{3}$$

stesso denominatore

- Per sottrarre due frazioni **con diverso denominatore** si riducono le frazioni al minimo comune denominatore, poi si sottraggono tra loro i rispettivi numeratori.

Esempio:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{12}{20}-\frac{5}{20}=\frac{12-5}{20}=\frac{7}{20}$$

diverso denominatore **minimo comune denominatore**

Proprietà della sottrazione in Q_a

- Non è un'operazione interna.
- Proprietà invariantiva.

Frazione complementare

Data una frazione propria, si chiama frazione complementare la frazione che, addizionata a quella data, dà l'intero.

Esempio: $\frac{3}{5}$ è la frazione complementare di $\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Moltiplicazione

Il prodotto di due frazioni è la frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Esempio:

prodotto dei numeratori

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

prodotto dei denominatori

Frazione reciproca

Due frazioni si dicono reciproche (o inverse) se il loro prodotto è uguale a 1.

Esempio:

$\frac{3}{5}$ è reciproco di $\frac{5}{3}$. $\quad \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{3 \times 5}{5 \times 3} = \frac{15}{15} = 1$$

Proprietà della moltiplicazione in Q_a

- Proprietà commutativa.
- Proprietà associativa.
- Elemento neutro (1).
- Elemento assorbente (0).
- Proprietà distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione.

Divisione

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando il dividendo per il **reciproco** del divisore.

Esempio:

reciproco del divisore

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{5}$$

divisione **moltiplicazione**

Proprietà della divisione in Q_a

- Proprietà invariantiva.
- Proprietà distributiva destra rispetto all'addizione e alla sottrazione.

Elevamento a potenza

La potenza di una frazione è la frazione che ha per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{(a)^m}{(b)^m}$$

Esempio:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{(2)^2}{(3)^2} = \frac{4}{9}$$

Proprietà delle potenze in Q_a

Per le frazioni valgono tutte le proprietà delle potenze dei numeri naturali.

Dai numeri decimali alle frazioni

La **frazione generatrice** di un certo numero decimale è la frazione che rappresenta quel numero.

Esempio: $\frac{6}{10}$ è la frazione generatrice di 0,6.

Frazione generatrice di un numero decimale limitato

La frazione generatrice di un numero decimale limitato ha per numeratore il numero dato, senza la virgola, e per denominatore la cifra 1 seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

Esempio:

$$\underbrace{2,\!34}_{\text{due cifre decimali}} = \frac{\overbrace{234}^{\text{numero senza la virgola}}}{\underbrace{100}_{\text{due zeri}}}$$

Frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico

Un numero decimale illimitato periodico è un numero con infinite cifre decimali, alcune delle quali si ripetono periodicamente.

Esempio:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,\!83333$$

periodo: cifra, o gruppo di cifre, che si ripete

antiperiodo: cifra, o gruppo di cifre, che precede il periodo

La frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico ha per numeratore la differenza tra il numero dato, senza virgola, e il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo, e per denominatore un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono, se esistono, le cifre dell'antiperiodo.

Esempio: **numero senza la virgola** — **cifra che precede il periodo**

$$0,\!4\overline{7} = \frac{\overbrace{47}^{\text{numero senza la virgola}} - \overbrace{4}^{\text{cifra che precede il periodo}}}{90} = \frac{43}{90}$$

Valori approssimati

Un numero decimale può essere **approssimato** per eccesso o per difetto.

Esempio: 2,33333333...

- $\boxed{2,\!33}$ approssimato per **difetto** a meno di 0,01
- $\boxed{2,\!3}$ approssimato per **difetto** a meno di 0,1
- $\boxed{2,\!4}$ approssimato per **eccesso** a meno di 0,1
- $\boxed{2,\!34}$ approssimato per **eccesso** a meno di 0,01