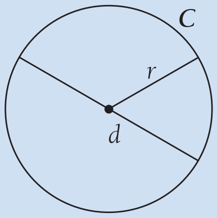
MAPPA 12 Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Lunghezza della circonferenza

Il rapporto tra la misura di una qualsiasi circonferenza (C) e quella del suo diametro ($d = 2r$) è costante ed è un numero irrazionale, indicato con il simbolo π (pi greco) e approssimato al valore **3,14**.

$\frac{C}{d} = \pi$ oppure approssimando $\frac{C}{d} = 3{,}14$



La misura della **lunghezza della circonferenza** sarà quindi:

$C = \pi d$ oppure approssimando $C = d \times 3{,}14$

$C = 2\pi r$ oppure approssimando $C = 6{,}28 \times r$

La misura del **raggio** sarà quindi:

$r = \frac{C}{2\pi}$ oppure approssimando $r = \frac{C}{6{,}28}$

Area del cerchio

L'area del cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato della misura del raggio per π.

$A = \pi r^2$

Ne consegue che:

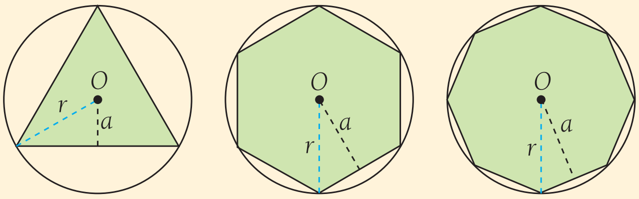
$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

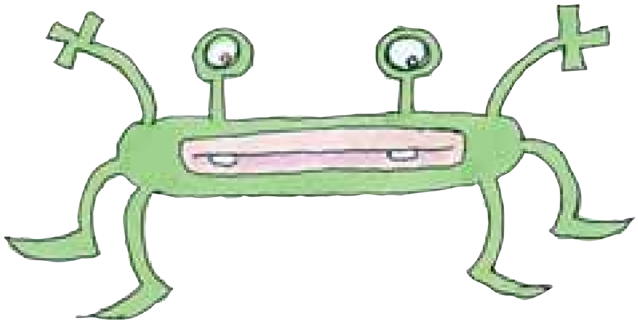
L'area dei poligoni e quella del cerchio

Un cerchio è equivalente a un poligono regolare inscritto con un numero infinito di lati e quindi con il perimetro congruente alla circonferenza.

Area poligoni regolari = perimetro × apotema : 2

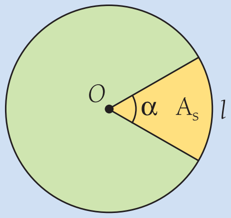
Area cerchio = circonferenza × raggio : 2





Misura di parti della circonferenza e del cerchio

La misura α dell'ampiezza di un angolo, la misura l della lunghezza dell'arco e la misura A_S della superficie del settore circolare sono grandezze legate tra loro da una relazione di **proporzionalità diretta**.



Se C è la misura della lunghezza della circonferenza e A è l'area del cerchio, abbiamo:

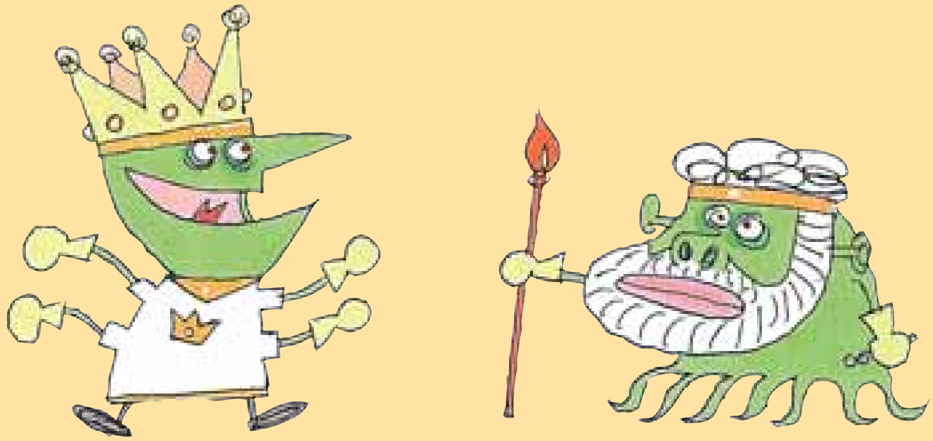
$\alpha : 360° = l : C = A_s : A$

Da questa catena di rapporti si ricavano tre proporzioni:

$\alpha : 360 = l : C$ da cui $\alpha = \dfrac{l \times 360}{C}$ $\quad C = \dfrac{l \times 360}{\alpha}$ $\quad l = \dfrac{C \times \alpha}{360}$

$\alpha : 360 = A_s : A$ da cui $\alpha = \dfrac{A_s \times 360}{A}$ $\quad A = \dfrac{A_s \times 360}{\alpha}$ $\quad A_s = \dfrac{A \times \alpha}{360}$

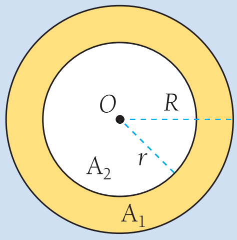
$l : C = A_s : A$ da cui $l = \dfrac{A_s \times C}{A}$ $\quad A = \dfrac{A_s \times C}{l}$ $\quad A_s = \dfrac{l \times A}{C}$



Area della corona circolare

L'area della corona circolare si ottiene calcolando la differenza tra l'area del cerchio maggiore (di raggio R) e l'area del cerchio minore (di raggio r).

$$A_{\text{corona circolare}} = A_1 - A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \times (R^2 - r^2)$$



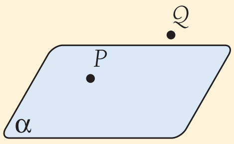
MAPPA 13

I solidi e la geometria nello spazio

Punti, rette e piani nello spazio

Punti e piani

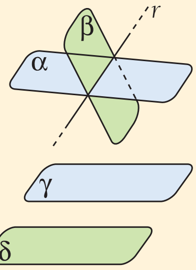
Il **punto P appartiene al piano**: si dice che P è **giacente** sul piano α. $P \in \alpha$.
Il **punto Q non appartiene al piano**: si dice che Q è **esterno** al piano α. $Q \notin \alpha$.



Piani

Due piani nello spazio sono **incidenti** (**o secanti**) se la loro intersezione è una retta. $\alpha \cap \beta = r$.

Due piani nello spazio sono **paralleli** se non hanno alcun punto in comune. $\gamma \cap \delta = \varnothing$.

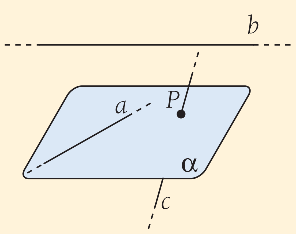


Rette e piani

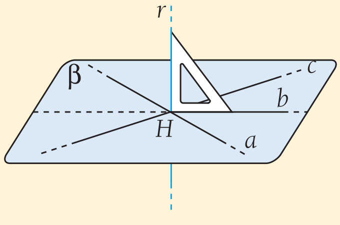
Una retta **giace su un piano** quando tutti i suoi punti appartengono al piano. $a \cap \alpha = a$.

Una retta è **parallela al piano** se nessun punto della retta è in comune con il piano. $b \cap \alpha = \varnothing$.

Una retta è **incidente al piano** se ha un solo punto in comune con il piano. $c \cap \alpha = \{P\}$.

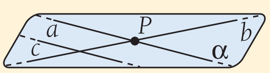


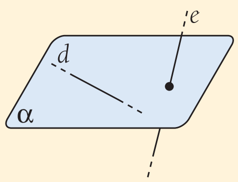
Una retta incidente è **perpendicolare al piano** se lo interseca in un punto e se è perpendicolare a ogni retta del piano passante per quel punto.
$r \perp \beta$ se $r \perp a$, $r \perp b$, $r \perp c$, ...



Rette

Due rette giacenti sullo stesso piano (**complanari**) sono **incidenti** se hanno un punto in comune.
$a, b \subset \alpha \quad a \cap b = \{P\}$
Due rette **complanari** sono **parallele** se non hanno alcun punto in comune $a, c \subset \alpha \quad a \cap c = \varnothing$.
Due rette sono **sghembe** se non esiste alcun piano nello spazio sul quale giacciono entrambe.
$d \subset \alpha \quad d \cap e = \varnothing$



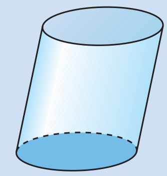


Solidi

Un **solido** è una parte di spazio delimitata da una superficie chiusa.

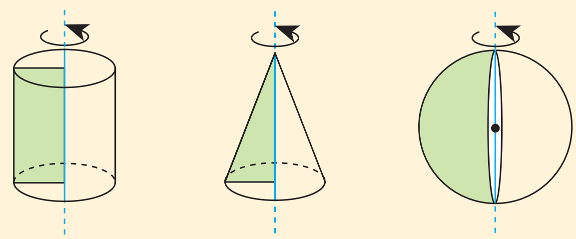
Solidi rotondi

La superficie dei **solidi rotondi** non è costituita da poligoni.



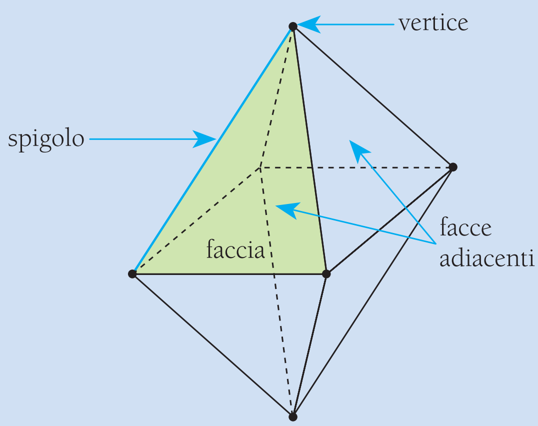
I solidi di rotazione

Si ottengono facendo ruotare di 360° una figura piana intorno a una retta, detta **asse di rotazione**.



Poliedri

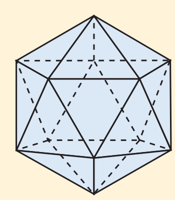
Un **poliedro** è un solido delimitato da poligoni, situati su piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi.



Poliedri regolari

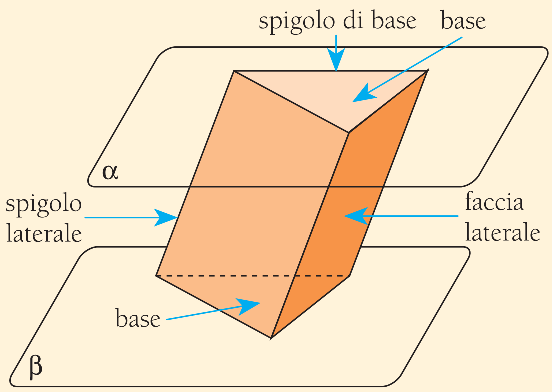
Un poliedro è regolare se:

- tutte le facce sono poligoni regolari congruenti tra loro;
- tutti gli angoli diedri, formati da facce adiacenti, sono congruenti.



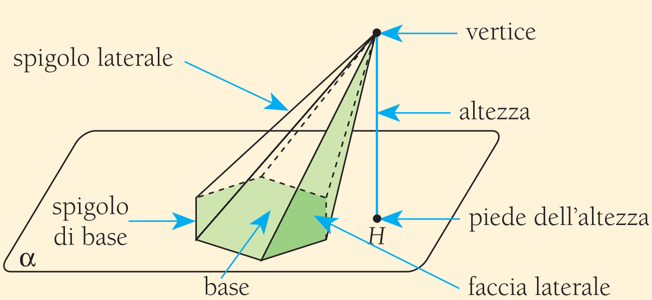
Prisma

Poliedro delimitato da due poligoni congruenti, detti **basi**, situati su piani **paralleli** e da tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuno dei due poligoni.



Piramide

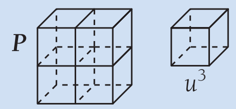
Poliedro delimitato da un poligono qualunque e da tanti triangoli quanti sono i lati del poligono, aventi tutti un vertice comune.



FIGURE

Misura dell'estensione solida

Ogni solido occupa una parte di spazio, ha cioè una **estensione solida**.
Il **volume** è la misura dell'estensione solida rispetto all'unità di misura fissata e si indica con la lettera V.
Esempio:
4 è il volume del solido ***P*** rispetto all'unità di misura u^3.



Il metro cubo

Nel sistema metrico decimale l'unità di misura dell'estensione solida è il **metro cubo** (**m**^{3}), ossia l'estensione di un cubo avente lo spigolo di 1 metro.

Multipli e sottomultipli del metro cubo

multiplo	dam^3 = 1000 m^3
metro cubo (m^3)	
sottomultipli	dm^3 = 0,001 m^3
	cm^3 = 0,000001 m^3
	mm^3 = 0,000000001 m^3

Misura della capacità

Un solido cavo può contenere un liquido: si chiama **capacità** la possibilità di un recipiente di contenere un liquido.
Nel sistema metrico decimale l'unità di misura della capacità è il **litro** (***l***).

Multipli e sottomultipli del litro

multipli	ettolitro (hl) = 100 *l*
	decalitro (dal) = 10 *l*
litro (*l*)	
sottomultipli	decilitro (dl) = 0,1 *l*
	centilitro (cl) = 0,01 *l*

Misura della massa e del peso

Ogni oggetto solido ha una sua massa.
La **massa** esprime la quantità di materia che costituisce un solido.
Nel sistema metrico decimale l'unità di misura fondamentale della massa di un solido è il **chilogrammo** (**kg**).
Le unità di misura della massa, nella vita quotidiana, sono utilizzate per indicare il **peso** degli oggetti.

Multipli e sottomultipli del chilogrammo (kg)

multipli	megagrammo	(Mg) = 1000 kg
chilogrammo (kg)		
sottomultipli	ettogrammo	(hg) = 0,1 kg
	decagrammo	(dag) = 0,01 kg
	grammo	(g) = 0,001 kg
	decigrammo	(dg) = 0,0001 kg
	centigrammo	(cg) = 0,00001 kg
	milligrammo	(mg) = 0,000001 kg

Peso specifico

Il peso di un corpo dipende dalla sostanza di cui è costituito.
Il peso specifico (*ps*) di una sostanza è il peso per unità di volume di quella sostanza oppure il rapporto tra peso P e volume V di una sua porzione.

$$ps = \frac{P}{V} \quad \text{da cui} \quad P = ps \times V \text{ e } V = \frac{P}{ps}$$

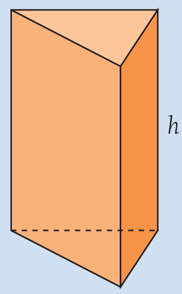
Le unità di misura del peso specifico
Il peso specifico si esprime in g/cm^3, kg/dm^3 oppure Mg/m^3.

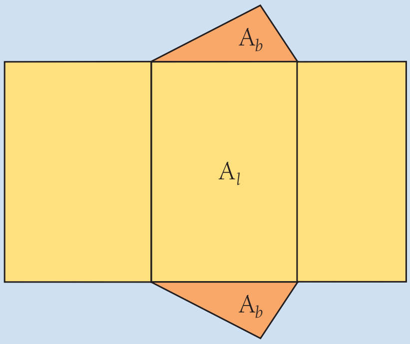
MAPPA 14

Prisma retto

Prisma con gli spigoli laterali **perpendicolari** alle basi.

- **Area della superficie laterale**
  $A_l = 2p \cdot h$
  da cui:
  $2p = \dfrac{A_l}{h}$
  $h = \dfrac{A_l}{2p}$



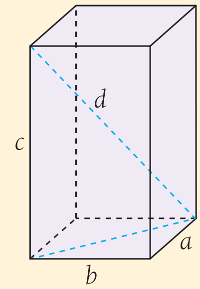


- **Area della superficie totale**
  $A_t = A_l + 2A_b$
- **Volume**
  $V = A_b \cdot h$ da cui: $h = \dfrac{V}{A_b}$ $A_b = \dfrac{V}{h}$

Parallelepipedo rettangolo

Prisma retto che ha per base due **rettangoli**.

- **Area della superficie laterale**
  $A_l = 2p \cdot c = 2(a + b) \times c$
  da cui:
  $2p = \dfrac{A_l}{c}$
  $c = \dfrac{A_l}{2p}$



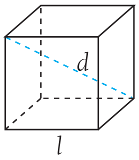
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$A_b = a \cdot b$
$2p = 2(a + b)$
$h = c$

- **Area della superficie totale**
  $A_t = 2(a \times b + a \times c + b \times c)$
- **Volume**
  $V = a \times b \times c = A_b \cdot c$ da cui: $c = \dfrac{V}{A_b}$ $A_b = \dfrac{V}{c}$

Cubo

Parallelepipedo rettangolo che ha le **tre dimensioni congruenti**.

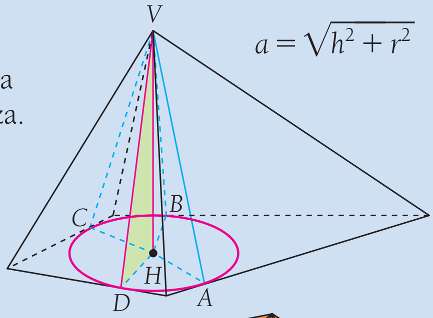
- **Area della superficie laterale**
  $A_l = 2p \cdot l = 4l^2$ da cui $l = \dfrac{A_p}{4}$
- **Area della superficie totale**
  $A_t = 6l^2$
- **Volume**
  $V = l^3$ da cui $l = \sqrt[3]{V}$



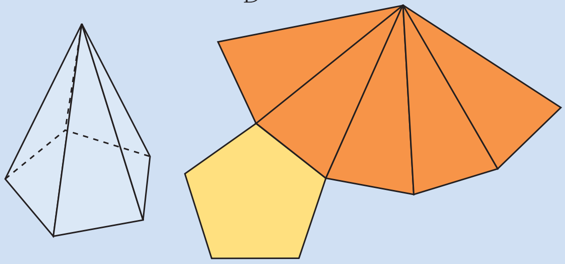
$d = l\sqrt{3}$
$A_b = l^2$
$2p = 4 \cdot l$
$h = l$

Piramide retta

Piramide che ha per base un poligono circoscrivibile a una circonferenza il cui centro coincide con il piede dell'altezza.

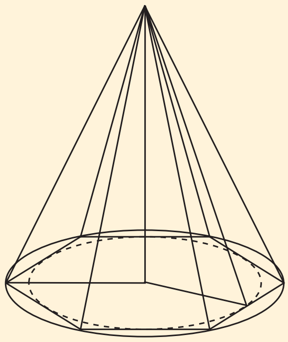


- **Area della superficie laterale**
  $A_l = \dfrac{2p \times a}{2}$ da cui $2p = \dfrac{2A_l}{a}$ $\quad a = \dfrac{2A_l}{2p}$
- **Area della superficie totale**
  $A_t = A_l + A_b$
- **Volume**
  $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$
  da cui $h = \dfrac{3V}{A_b}$ $\quad A_b = \dfrac{3V}{h}$



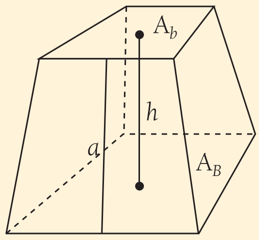
Piramide regolare

Piramide retta che ha per base un **poligono regolare**.



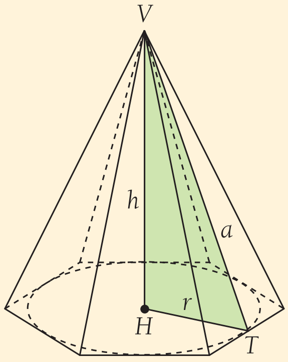
Tronco di piramide retto

Parte di piramide retta compresa tra due sezioni parallele alla base.



Apotema

In una piramide retta, è l'altezza di una qualsiasi faccia laterale.
Si indica con a.

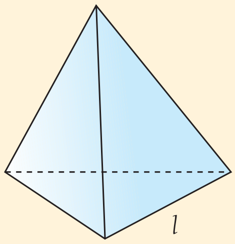


FIGURE

Poliedri regolari

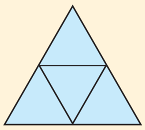
Poliedri in cui tutte le facce sono **poligoni regolari congruenti** tra loro e tutti gli angoli diedri, formati da facce adiacenti, sono congruenti.

Tetraedro



Facce: triangoli equilateri
Numero facce (n): 4

Sviluppo nel piano



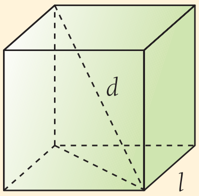
Area faccia
$A_f = N' \times l^2 = 0{,}433 \times l^2$

Area totale
$A_t = n \times A_f = 4 \times 0{,}433 \times l^2$

Volume
$V = M \times l^3 = 0{,}117 \times l^3$
Formula inversa:

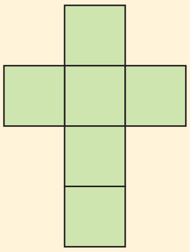
$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{M}} = \sqrt[3]{\frac{V}{0{,}117}}$$

Esaedro



Facce: quadrati
Numero facce (n): 6

Sviluppo nel piano



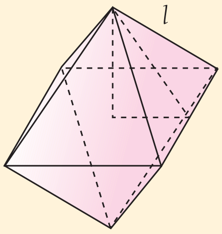
Area faccia
$A_f = N' \times l^2 = 1 \times l^2$

Area totale
$A_t = n \times A_f = 6 \times l^2$

Volume
$V = M \times l^3 = 1 \times l^3$
Formula inversa:

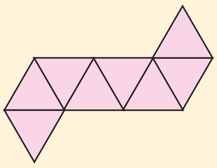
$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{M}} = \sqrt[3]{\frac{V}{1}}$$

Ottaedro



Facce: triangoli equilateri
Numero facce (n): 8

Sviluppo nel piano



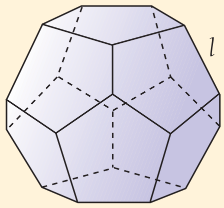
Area faccia
$A_f = N' \times l^2 = 0{,}433 \times l^2$

Area totale
$A_t = n \times A_f = 8 \times 0{,}433 \times l^2$

Volume
$V = M \times l^3 = 0{,}471 \times l^3$
Formula inversa:

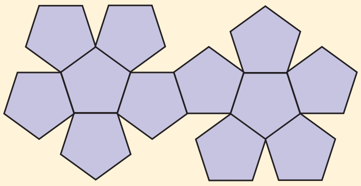
$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{M}} = \sqrt[3]{\frac{V}{0{,}471}}$$

Dodecaedro



Facce: pentagoni regolari
Numero facce (n): 12

Sviluppo nel piano



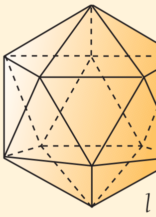
Area faccia
$A_f = N' \times l^2 = 1{,}720 \times l^2$

Area totale
$A_t = n \times A_f = 12 \times 1{,}720 \times l^2$

Volume
$V = M \times l^3 = 7{,}663 \times l^3$
Formula inversa:

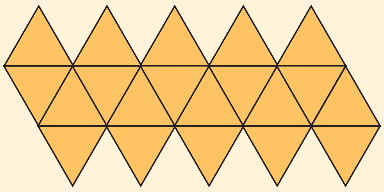
$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{M}} = \sqrt[3]{\frac{V}{7{,}663}}$$

Icosaedro



Facce: triangoli equilateri
Numero facce (n): 20

Sviluppo nel piano



Area faccia
$A_f = N' \times l^2 = 0{,}433 \times l^2$

Area totale
$A_t = n \times A_f = 20 \times 0{,}433 \times l^2$

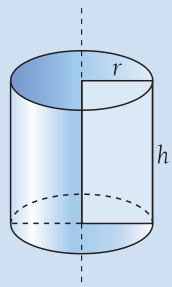
Volume
$V = M \times l^3 = 2{,}181 \times l^3$
Formula inversa:

$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{M}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2{,}181}}$$

MAPPA 15

Cilindro circolare retto

Solido generato dalla rotazione completa di un **rettangolo** attorno a un lato.

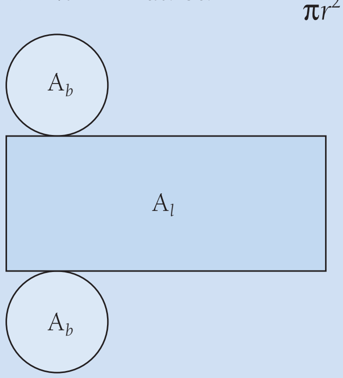


- **Area della superficie laterale**

$A_l = C \cdot h = 2\pi rh$ da cui $r = \dfrac{A_l}{2\pi h}$ $h = \dfrac{A_l}{2\pi r}$

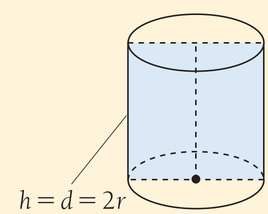
- **Area della superficie totale**
$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2$

- **Volume**
$V = A_b \cdot h = \pi r^2 h$ da cui $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$

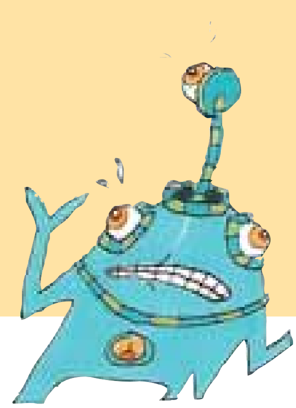


Cilindro equilatero

Cilindro la cui altezza è congruente al diametro.

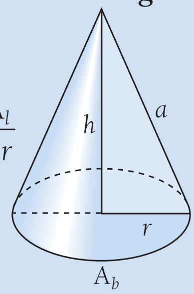


- **Area della superficie laterale**
$A_l = 4\pi r^2$
- **Area della superficie totale**
$A_t = 6\pi r^2$
- **Volume**
$V = 2\pi r^3$



Cono circolare retto

Solido generato dalla rotazione completa di un **triangolo** attorno a un cateto.



- **Area della superficie laterale**

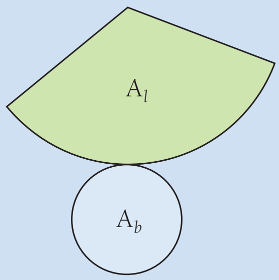
$$A_l = \frac{C \cdot a}{2} = \pi r a \quad \text{da cui} \quad r = \frac{A_l}{\pi a} \quad a = \frac{A_l}{\pi r}$$

- **Area della superficie totale**

$$A_t = A_b + A_l = \pi r^2 + \pi r a$$

- **Volume**

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \text{da cui} \quad h = \frac{3 \times V}{\pi r^2} \quad r = \sqrt{\frac{3 \times V}{\pi h}}$$



Cono equilatero

Cono il cui apotema è congruente al diametro.

- **Area della superficie laterale**

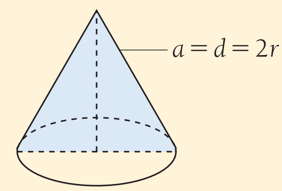
$$A_l = 2\pi r^2$$

- **Area della superficie totale**

$$A_t = 3\pi r^2$$

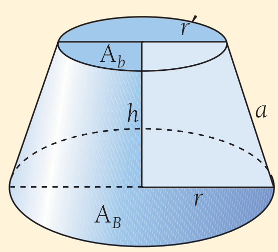
- **Volume**

$$V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$$



Tronco di cono

Solido generato dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi.



Sfera

Solido generato dalla rotazione completa di un **semicerchio** attorno al suo diametro.

La superficie della sfera non può essere sviluppata su un piano.

- **Area della superficie sferica**

$$A_s = 4\pi r^2 \quad \text{da cui} \quad r = \sqrt{\frac{A_s}{4\pi}}$$

- **Volume**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{da cui} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$