MAPPA 8

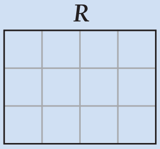
Area dei poligoni e figure equivalenti

Misura dell'estensione superficiale

L'**area** è la misura dell'estensione superficiale di una figura rispetto all'unità di misura fissata. Indichiamo l'area con la lettera A.

Esempio:

R



u^2

12 è l'area del rettangolo ***R*** secondo l'unità di misura u^2.

Il metro quadrato

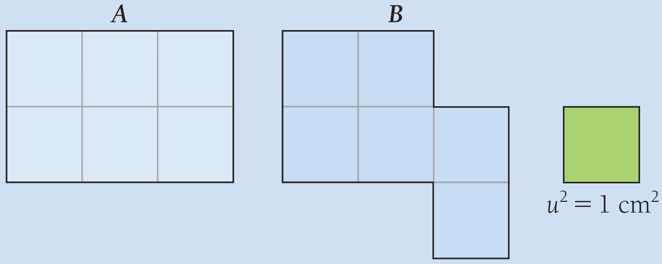
Nel sistema metrico decimale l'**unità di misura** dell'estensione superficiale è il **metro quadrato** (**m²**) con i suoi multipli e sottomultipli.

multipli	km^2	$= 1\,000\,000\ m^2$
	hm^2	$= 10\,000\ m^2$
	dam^2	$= 100\ m^2$
	metro quadrato m²	
sottomultipli	dm^2	$= 0{,}01\ m^2$
	cm^2	$= 0{,}0001\ m^2$
	mm^2	$= 0{,}000001\ m^2$

Figure equivalenti

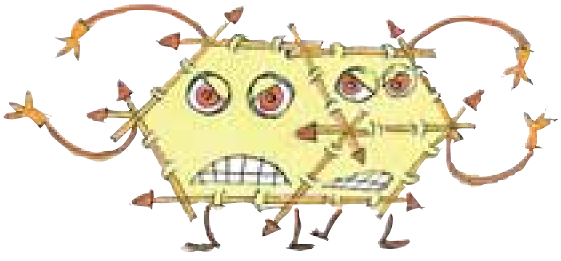
Due figure che hanno la **stessa area** sono equivalenti:

$A \doteq B$

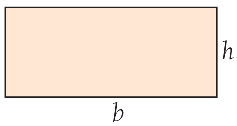
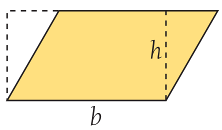
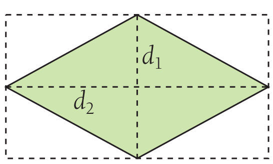
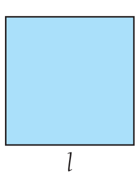
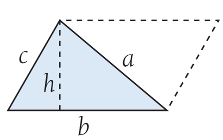
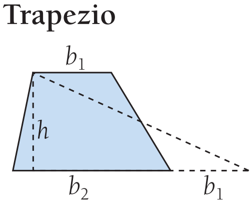


Criterio di equivalenza dei poligoni

Se due o più figure sono scomponibili in uno stesso numero di parti rispettivamente congruenti, allora sono equivalenti.



Area di alcuni poligoni

Poligoni	Formule dirette		Formule inverse
Rettangolo 	$A = b \times h$	$h \xrightarrow{\times b} A$, $A \xrightarrow{b:} h$ $b \xrightarrow{\times h} A$, $A \xrightarrow{h:} b$	$h = \dfrac{A}{b}$ $b = \dfrac{A}{h}$
Parallelogramma 	$A = b \times h$	$h \xrightarrow{\times b} A$, $A \xrightarrow{b:} h$ $b \xrightarrow{\times h} A$, $A \xrightarrow{h:} b$	$h = \dfrac{A}{b}$ $b = \dfrac{A}{h}$
Rombo 	$A = \dfrac{d_1 \times d_2}{2}$	$d_1 \xrightarrow{\times d_2} \boxed{2A} \xrightarrow{:2} A$ $A \xrightarrow{2\times} \boxed{2A} \xrightarrow{d_2:} d_1$	$d_1 = \dfrac{2A}{d_2}$ $d_2 = \dfrac{2A}{d_1}$
Quadrato 	$A = l \times l = l^2$	$l \xrightarrow{(\ )^2} A$, $A \xrightarrow{\sqrt{\ }} l$	$l = \sqrt{A}$
Triangolo 	$A = \dfrac{b \times h}{2}$ oppure $A = 2p \times (p - a) \times$ $\times (p - b) \times (p - c)$ (applicando la formula di Erone)	$b \xrightarrow{\times h} \boxed{2A} \xrightarrow{:2} A$ $A \xrightarrow{2\times} \boxed{2A} \xrightarrow{h:} b$ $h \xrightarrow{\times b} \boxed{2A} \xrightarrow{:2} A$ $A \xrightarrow{2\times} \boxed{2A} \xrightarrow{b:} h$	$b = \dfrac{2 \times A}{h}$ $h = \dfrac{2 \times A}{b}$
Trapezio 	$A = \dfrac{(b_1 + b_2) \times h}{2}$	$(b_1 + b_2) \xrightarrow{\times h} \boxed{2A}$, $\boxed{2A} \xrightarrow{h:} (b_1 + b_2)$ $h \xrightarrow{\times (b_1 + b_2)} \boxed{2A}$, $\boxed{2A} \xrightarrow{(b_1 + b_2):} h$	$(b_1 + b_2) = \dfrac{2A}{h}$ $h = \dfrac{2A}{b_1 + b_2}$

MAPPA 9

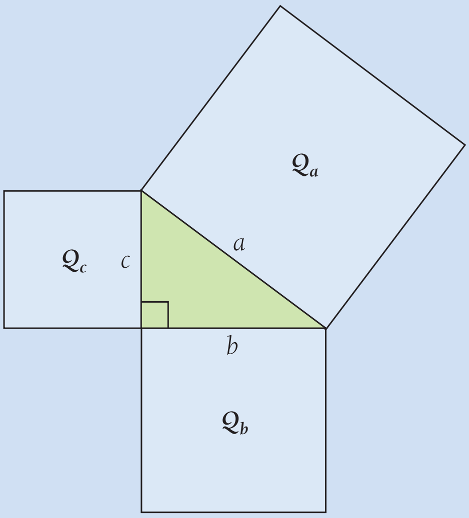
Il teorema di Pitagora e le sue applicazioni

Teorema di Pitagora

In un **triangolo rettangolo** il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti:

$Q_a \doteq Q_b + Q_c$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Area di } Q_a = a^2 \\ \text{Area di } Q_b = b^2 \\ \text{Area di } Q_c = c^2\end{array}\right\} a^2 = b^2 + c^2$$



La misura dell'ipotenusa

La misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle misure dei cateti:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

La misura di un cateto

La misura di un cateto di un triangolo rettangolo è uguale alla radice quadrata della differenza tra il quadrato della misura dell'ipotenusa e il quadrato della misura dell'altro cateto:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Terne pitagoriche

Una terna pitagorica è un insieme di tre numeri naturali c, b e a che verificano le relazioni: $c^2 + b^2 = a^2$ e $c < b < a$.

Terne primitive e terne derivate

- Se una terna è formata da **numeri primi fra loro** è detta terna pitagorica **primitiva**.

Esempio: le terne

3, 4, 5   5, 12, 13   8, 15, 17

sono terne pitagoriche primitive.

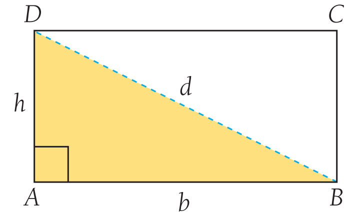
- Se si moltiplica una terna pitagorica primitiva c, b, a per un numero naturale n diverso da zero, si ottiene ancora una terna pitagorica, detta **derivata**.

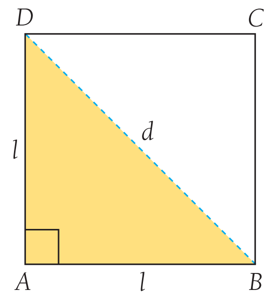
Esempio: moltiplicando ciascun numero della terna primitiva 3, 4 e 5 per 7 si ottiene:

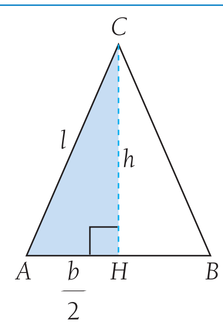
$$3 \times 7 = 21 \qquad 4 \times 7 = 28 \qquad 5 \times 7 = 35$$

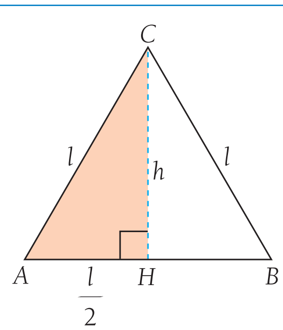
dove 21, 28 e 35 formano una terna pitagorica derivata.

Applicazioni del teorema di Pitagora

<table>
<tr>
<td>Rettangoli</td>
<td>

La diagonale divide il rettangolo in due triangoli rettangoli congruenti.</td>
<td>$d = \sqrt{b^2 + h^2}$
$h = \sqrt{d^2 - b^2}$
$b = \sqrt{d^2 - h^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Quadrati</td>
<td>

La diagonale divide il quadrato in due triangoli rettangoli isosceli congruenti.</td>
<td>$d = \sqrt{l^2 + l^2} = l \times \sqrt{2}$
$l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$
$(\sqrt{2} \overset{0,01}{=} 1,41)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Triangoli isosceli</td>
<td>

L'altezza CH, relativa alla base AB, divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli congruenti.</td>
<td>$l = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$
$\dfrac{b}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}$
$h = \sqrt{l^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Triangoli equilateri</td>
<td>

L'altezza divide il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli congruenti.</td>
<td>$h = \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{l \times \sqrt{3}}{2}$
$l = \dfrac{2 \times h}{\sqrt{3}}$
$(\sqrt{3} \overset{0,01}{=} 1,73)$</td>
</tr>
</table>

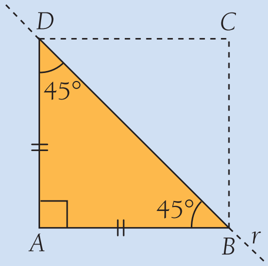
Triangoli rettangoli con angoli particolari

Triangoli rettangoli isosceli

Un triangolo rettangolo isoscele è la metà di un quadrato di lato uguale a ognuno dei cateti.

$$\text{ipotenusa} = \text{cateto} \times \sqrt{2}$$

$$\text{cateto} = \frac{\text{ipotenusa}}{\sqrt{2}}$$



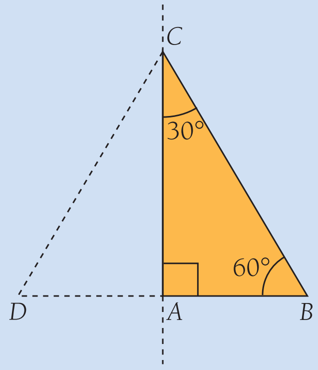
Triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60°

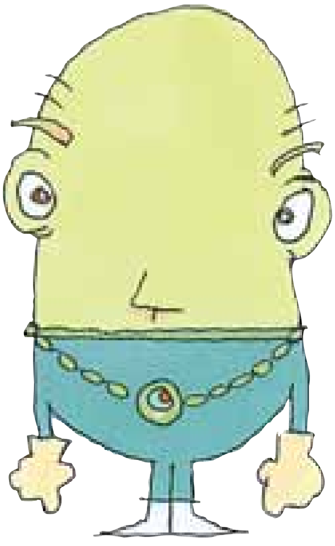
Un triangolo rettangolo con angoli acuti di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero di lato uguale all'ipotenusa.

$$\text{cateto}_{\text{minore}} = \frac{\text{ipotenusa}}{2}$$

$$\text{cateto}_{\text{maggiore}} = \frac{\text{ipotenusa} \times \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ipotenusa} = \frac{(\text{cateto}_{\text{maggiore}} \times 2)}{\sqrt{3}}$$



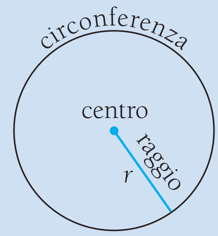


FIGURE

MAPPA 10 La circonferenza e i poligoni inscritti e circoscritti

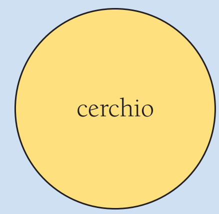
Circonferenza

La circonferenza è una **linea chiusa** costituita dall'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto **centro**.



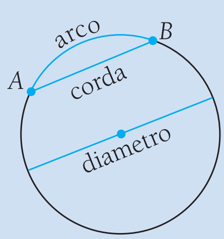
Cerchio

Il cerchio è la **parte di piano** limitata da una circonferenza e costituita dai punti interni o appartenenti alla circonferenza.



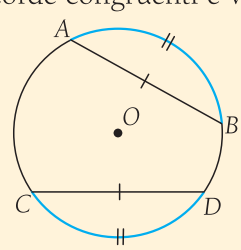
Archi e corde

Un **arco** è una parte di circonferenza limitata da due suoi punti.
La **corda** è il segmento che unisce due punti della circonferenza.
La corda che passa per il centro della circonferenza si chiama **diametro**.

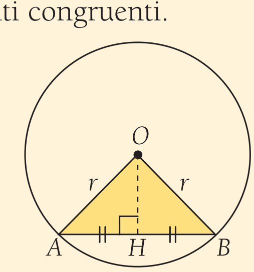


Diametro e raggio
Il diametro è congruente al doppio del raggio:
$$d = 2r$$

Proprietà di archi e corde
Archi congruenti di una stessa circonferenza sottendono corde congruenti e viceversa.



La perpendicolare condotta dal centro della circonferenza a una corda divide la corda in due segmenti congruenti.

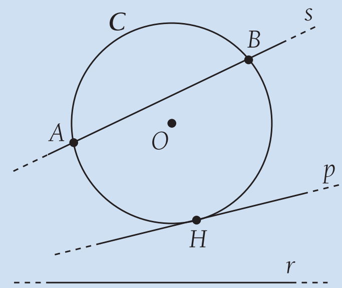


Posizioni reciproche di una retta e una circonferenza

Una retta rispetto a una circonferenza può essere:

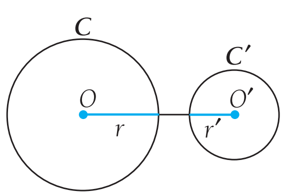
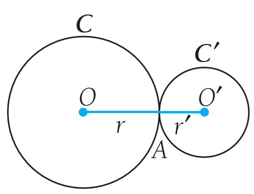
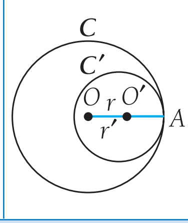
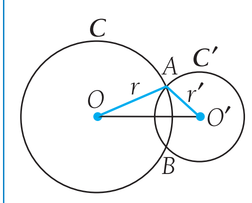
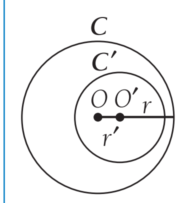
- **esterna** quando non ha alcun punto in comune con la circonferenza;
- **tangente** se ha un solo punto in comune con la circonferenza;
- **secante** se ha due punti in comune con la circonferenza.

r è esterna a $\mathcal{C}$ $\quad r \cap \mathcal{C} = \varnothing$
s è secante a $\mathcal{C}$ $\quad s \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$
p è tangente a $\mathcal{C}$ $\quad p \cap \mathcal{C} = \{H\}$



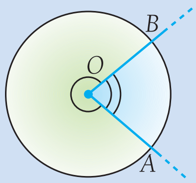
Posizioni reciproche di due circonferenze

Due circonferenze possono essere:

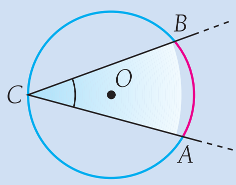
Esterne	Tangenti esternamente	Tangenti internamente	Secanti	Interna l'una all'altra
				

Angoli al centro e alla circonferenza

Si chiama **angolo al centro** un angolo che ha il suo vertice nel centro di una circonferenza.

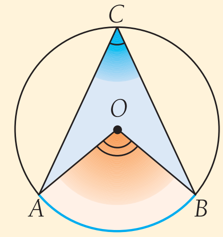


Si chiama **angolo alla circonferenza** un angolo che ha il suo vertice in un punto della circonferenza e i suoi lati o entrambi secanti o uno tangente e uno secante.

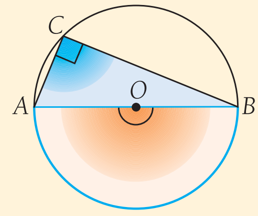


Relazione tra angoli al centro e angoli alla circonferenza

Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.



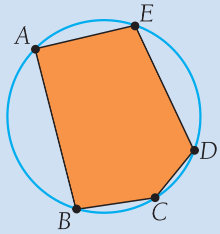
Esempio: ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto.



FIGURE

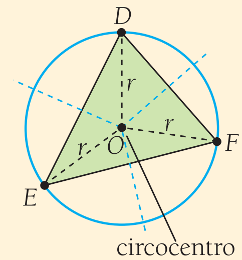
Poligoni inscritti in una circonferenza

Un poligono è inscritto in una circonferenza quando tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza.



Condizioni di inscrivibilità

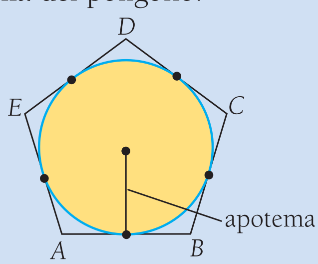
Un poligono si può inscrivere in una circonferenza se gli **assi** dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto (detto **circocentro**).



- Ogni **triangolo** si può inscrivere in una circonferenza.
- Un **quadrilatero** si può inscrivere in una circonferenza solo quando le coppie di angoli opposti sono supplementari.

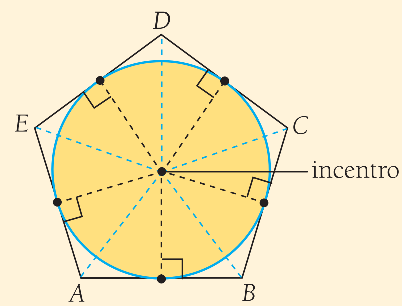
Poligoni circoscritti a una circonferenza

Un poligono è circoscritto a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Il raggio della circonferenza inscritta in un poligono è detto **apotema** del poligono.



Condizioni di circoscrivibilità

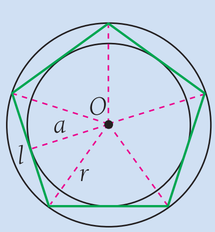
Un **poligono** si può circoscrivere a una circonferenza se le **bisettrici** dei suoi angoli si incontrano tutte in uno stesso punto (detto **incentro**).



- Ogni **triangolo** si può circoscrivere a una circonferenza.
- Un **quadrilatero** si può circoscrivere a una circonferenza solo quando la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

Poligoni regolari

Ogni poligono regolare si può inscrivere e circoscrivere a due circonferenze concentriche (interne con i centri coincidenti).



Rapporto tra apotema e lato di un poligono regolare

In un poligono regolare il rapporto tra la misura (a) dell'apotema e la misura (l) del lato è costante e dipende unicamente dal numero dei lati. Tale valore viene chiamato **numero fisso** (**N**).

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{l}} = \mathbf{N} \quad \text{da cui} \quad a = \mathbf{N} \times l \qquad l = \frac{a}{\mathbf{N}}$$

Area di un poligono regolare

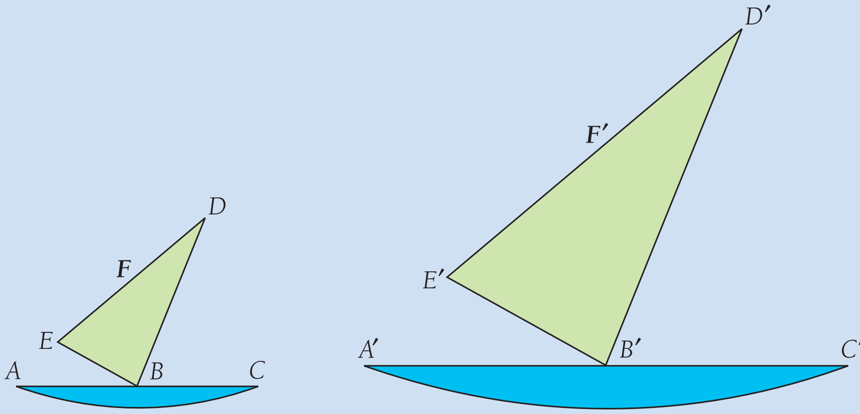
L'area di un poligono regolare si ottiene moltiplicando la misura del perimetro per la misura dell'apotema e dividendo il prodotto per due:

$$\mathrm{A} = \frac{2p \times a}{2} \quad \text{da cui} \quad 2p = \frac{\mathrm{A} \times 2}{a} \qquad a = \frac{\mathrm{A} \times 2}{2p}$$

MAPPA 11 — Le figure simili e l'omotetia

Concetto di similitudine

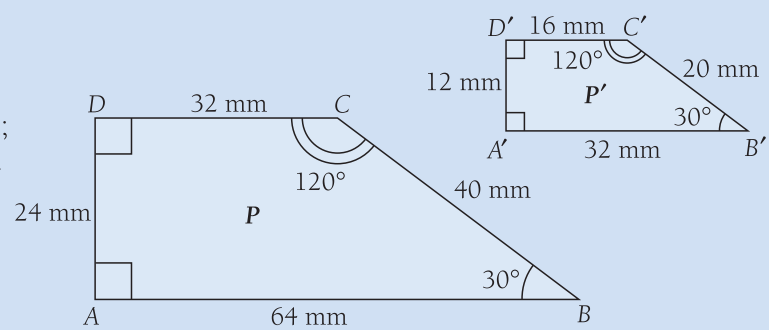
La similitudine è una trasformazione geometrica tra i punti di uno stesso piano che mantiene **costante il rapporto tra segmenti corrispondenti**.
Il rapporto tra ogni coppia di segmenti corrispondenti di due figure simili ***F*** e ***F′*** è costante ed è detto **rapporto di similitudine**.



Poligoni regolari simili
I poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili.

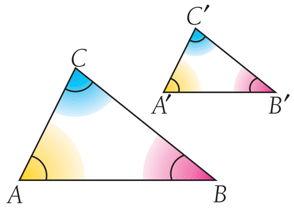
Poligoni simili

Due poligoni sono simili se hanno:
- gli **angoli** corrispondenti **congruenti**;
- i **lati** corrispondenti **in proporzione**.



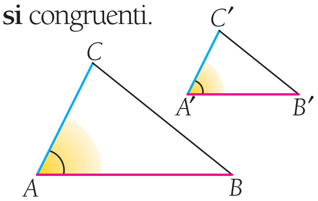
Criteri di similitudine fra triangoli

I criterio di similitudine
Due triangoli sono simili se gli **angoli** corrispondenti sono congruenti.



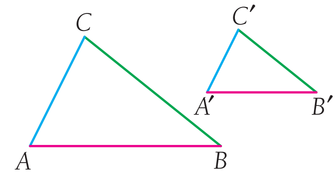
$\widehat{A}' = \widehat{A} \qquad \widehat{B}' = \widehat{B}$
$\widehat{C}' = \widehat{C}$

II criterio di similitudine
Due triangoli sono simili se hanno in proporzione due **coppie di lati** corrispondenti e gli **angoli fra essi compresi** congruenti.



$A'B' : AB = A'C' : AC$
$\widehat{A}' = \widehat{A}$

III criterio di similitudine
Due triangoli sono simili se hanno i **lati** corrispondenti in proporzione.



$A'B' : AB = B'C' : BC =$
$= A'C' : AC$

Relazioni fra poligoni simili

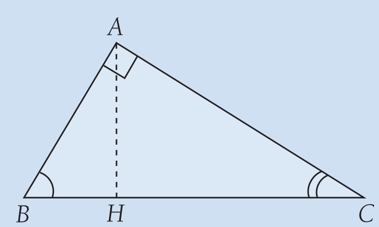
	Rapporti	Proporzioni
Perimetri	In due poligoni simili il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine: $\frac{2p'}{2p} = k$ quindi: $2p' = 2p \times k$	In due poligoni simili i perimetri stanno fra loro come le misure di due lati corrispondenti qualsiasi: $2p' : 2p = l' : l$
Diagonali, altezze, mediane, apotemi...	In due poligoni simili il rapporto tra elementi corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine $\frac{d'}{d} = k$, $\frac{l'}{l} = k$ ...	In due poligoni simili le misure di diagonali, altezze, mediane, apotemi corrispondenti sono in proporzione: $d' : d = h' : h = l' : l ... = k$
Aree	In due poligoni simili il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine: $\frac{A'}{A} = k^2$	Le aree di due poligoni simili stanno tra loro come i quadrati delle misure di due lati corrispondenti qualsiasi o come i quadrati dei due perimetri: $A' : A = (l')^2 : (l)^2 = (2p')^2 : (2p)^2$

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

$BC : AB = AB : BH$ e $BC : AC = AC : HC$

$AB^2 = BC \times BH$ e $AC^2 = BC \times HC$

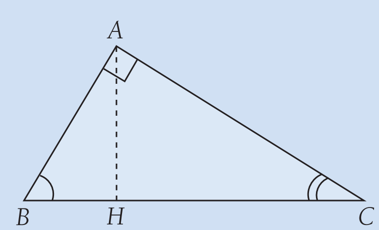


Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

$BH : AH = AH : HC$

$AH^2 = BH \times HC$



Ingrandimenti e riduzioni

La costruzione di poligoni simili

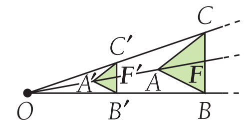
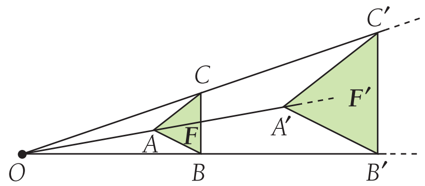
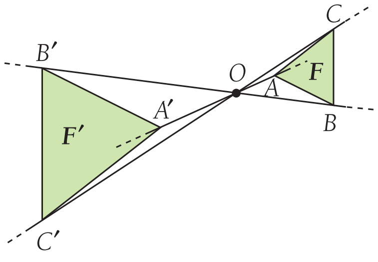
Se una figura F' deve essere trasformata in una figura F nella similitudine di rapporto K:

- gli angoli corrispondenti devono essere congruenti;
- il rapporto tra i **lati** $\left(\frac{l'}{l}\right)$ deve essere costante:

$$K = \frac{l'}{l} \quad \text{e} \quad l' = K \cdot l$$

Quando $K < 1 \rightarrow F$ è ridotta rispetto a F' e K è detto di **scala di riduzione**.
Quando $K > 1 \rightarrow F$ è ingrandita rispetto a F' e K è detto di **scala di ingrandimento**.
Quando $K = 1 \rightarrow$ le figure F e F' sono **congruenti**.

Omotetia diretta e omotetia inversa

Omotetia	Trasformazione geometrica nel piano in cui i punti corrispondenti delle figure omotetiche...	
diretta	... si trovano sulla stessa semiretta di origine O;	
inversa	... si trovano su semirette opposte di origine O.	

FIGURE