MAPPA 1

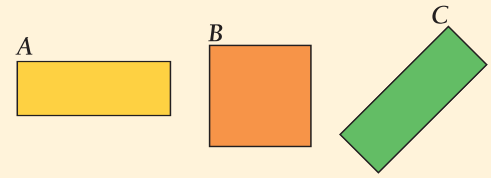
Figure geometriche: idee, misure, strumenti

Figure geometriche
Una figura geometrica è un insieme di punti.

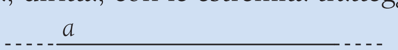
Figure piane e figure solide
- Una figura i cui punti appartengono tutti allo stesso piano si chiama **piana**.
- Una figura i cui punti appartengono a più piani si chiama **solida**.
- Le figure si indicano in genere con lettere maiuscole in neretto ***A***, ***B***, ***C***, ...

Figure congruenti
Due figure geometriche sono **congruenti** quando possono essere sovrapposte una all'altra in modo che *coincidano* punto per punto esattamente, senza essere deformate.

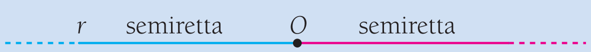
Esempio:
A è congruente a ***C*** ma non a ***B***.



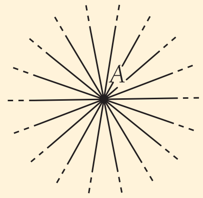
Rette e semirette
La **retta** è una particolare linea piana, aperta e illimitata; si indica con lettere minuscole e si rappresenta come una linea continua, diritta, con le estremità tratteggiate.



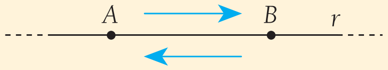
Si chiama **semiretta** ciascuna delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto qualsiasi O, detto **origine** delle semirette.



Caratteristiche delle rette
- Per un punto passano infinite rette.



- Per due punti passa una sola retta.

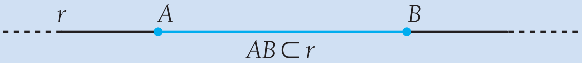


$A \in r$ $B \in r$

I punti A e B appartengono alla retta r.

- Una retta individua una sola direzione e due versi, uno opposto all'altro.

Segmenti
La parte di retta compresa tra due punti si chiama **segmento**.



$AB \subset r$

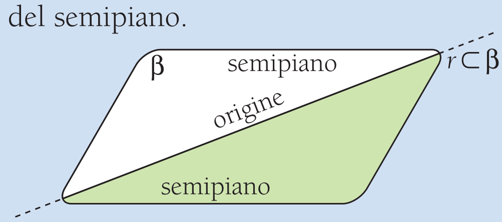
Il segmento AB è contenuto nella retta r.

Distanza tra due punti
Si dice **distanza** tra due punti il segmento che ha tali punti come estremi.

Piani e semipiani

Il **piano** è una figura senza spessore e illimitata; si indica con lettere dell'alfabeto greco α, β, γ, ...

Si chiama **semipiano** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da una sua retta *r*, detta **origine** del semipiano.



Grandezze

Le grandezze geometriche sono le caratteristiche di una figura geometrica che possono essere misurate.

Esempio: La lunghezza di un segmento e l'estensione di una figura sono grandezze perché possono essere misurate.

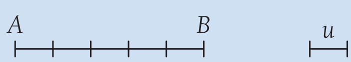
Grandezze omogenee e grandezze eterogenee

Due grandezze che sono confrontabili fra loro si dicono **omogenee**.
Due grandezze di natura diversa, e quindi non confrontabili fra loro, si dicono **eterogenee**.

Misura

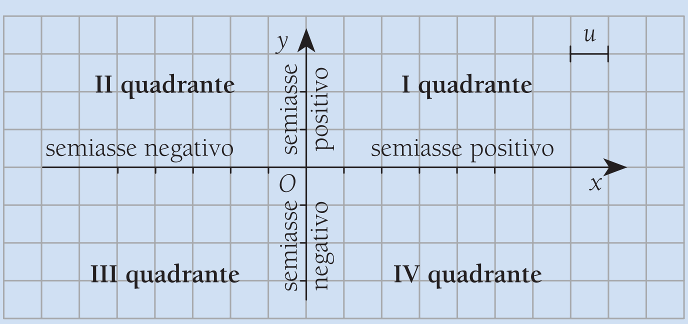
Misurare una certa grandezza significa stabilire quante volte l'**mappa di misura** scelta, omogenea con la grandezza data, è contenuta nella grandezza in esame.

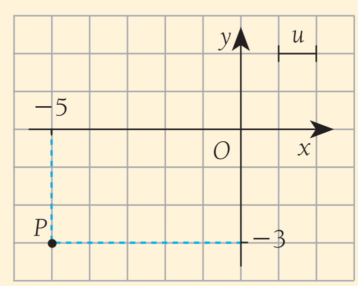
Esempio:
La misura di *AB* rispetto a *u* è 5.



Il piano cartesiano

Piano in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano.





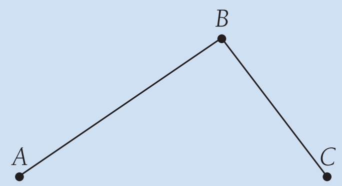
Coordinate cartesiane

$P(-5\,;\,-3)$
Ascissa: -5
Ordinata: -3

MAPPA 2 I segmenti e le loro proprietà

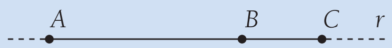
Segmenti consecutivi e segmenti adiacenti

Due segmenti che hanno in comune un estremo e nessun altro punto si dicono **consecutivi**.



$AB \cap BC = \{B\}$

Due segmenti consecutivi che appartengono a una stessa retta si dicono **adiacenti**.

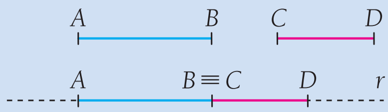


$AB \cap BC = \{B\}$ e $A, B, C \in r$

Operazioni con i segmenti

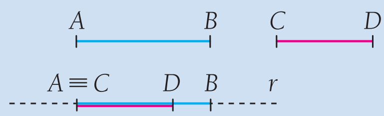
Addizione

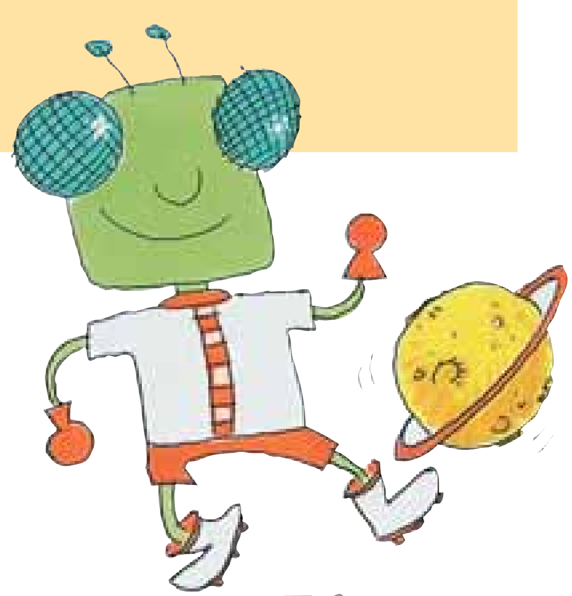
Per addizionare i segmenti AB e CD li riportiamo su una stessa retta r in modo che siano adiacenti: AD è la loro somma.



Sottrazione

Per sottrarre il segmento CD al segmento AB, li riportiamo su una stessa retta r in modo che siano sovrapposti e che A coincida con C: DB è la loro differenza.



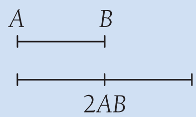


Multipli e sottomultipli di un segmento

Multipli di un segmento

Costruire il multiplo di un segmento AB consiste nel sommare il segmento a se stesso un certo numero di volte.

Esempio:

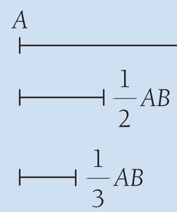


$2AB$ è il doppio di AB, o multiplo di AB secondo il numero 2.

Sottomultipli di un segmento

Il sottomultiplo di un segmento AB è un segmento congruente alla sua metà, a un suo terzo...

Esempio:



$\frac{1}{2}AB$ è metà di AB, o sottomultiplo di AB secondo il numero 2;

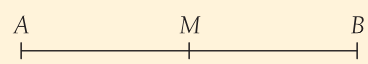
$\frac{1}{3}AB$ è un terzo di AB, o sottomultiplo di AB secondo il numero 3.

Punto medio

Il punto medio di un segmento è il punto che divide un segmento in due segmenti congruenti.

$AM = MB = \frac{1}{2}AB$

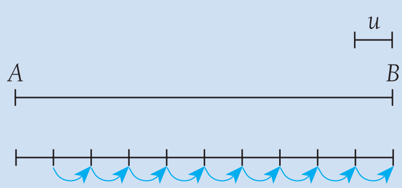
$AB = 2AM = 2MB$



Misura della lunghezza di un segmento

Per misurare la lunghezza di un segmento AB calcoliamo quante volte l'unità di misura u è contenuta nel segmento AB.

Esempio:



$AB = 10\,u$

10 è la misura del segmento AB secondo l'unità di misura u.

Il metro

Nel sistema metrico decimale l'unità di misura della lunghezza è il **metro** (m).

Multipli e sottomultipli del metro

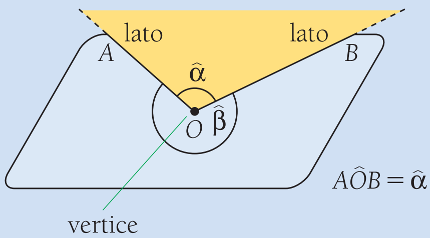
multipli	chilometro (km)	=	1000 m
	ettometro (hm)	=	100 m
	decametro (dam)	=	10 m
	metro	**(m)**	
sottomultipli	decimetro (dm)	=	0,1 m
	centimetro (cm)	=	0,01 m
	millimetro (mm)	=	0,001 m

MAPPA 3

Angoli, parallelismo e perpendicolarità

Angoli

Si chiama **angolo** ciascuna delle due parti (illimitate) in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune.



Angoli congruenti

Due angoli che hanno la stessa ampiezza sono congruenti.

Misura dell'ampiezza di un angolo

L'unità di misura dell'ampiezza di un angolo è il **grado** (°), che rappresenta la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. Lo strumento per misurare l'ampiezza di un angolo è il **goniometro**.

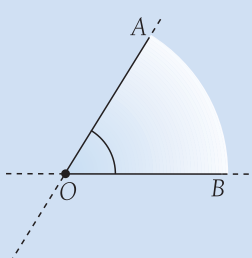
I sottomultipli del grado si ottengono mediante successive divisioni per 60:

$$1 \text{ primo } (') = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

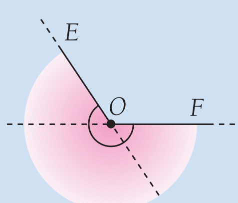
$$1 \text{ secondo } ('') = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$

Angoli convessi e angoli concavi

Si chiama **convesso** un angolo che non contiene i prolungamenti dei suoi lati.

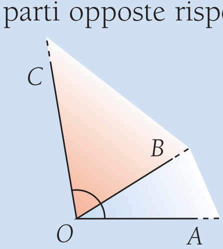


Si chiama **concavo** un angolo che contiene i prolungamenti dei suoi lati.

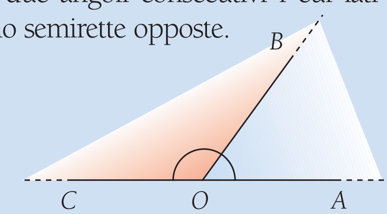


Angoli consecutivi e angoli adiacenti

Sono **consecutivi** due angoli che hanno il vertice e un lato in comune mentre gli altri due lati si trovano da parti opposte rispetto al lato comune.

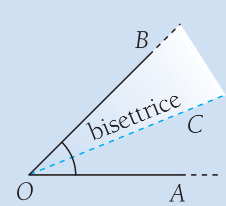


Sono **adiacenti** due angoli consecutivi i cui lati non comuni sono semirette opposte.



Bisettrice di un angolo

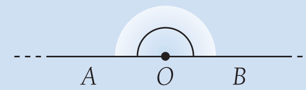
La **bisettrice** di un angolo è la semiretta avente l'origine coincidente con il vertice dell'angolo che lo divide in due parti congruenti.



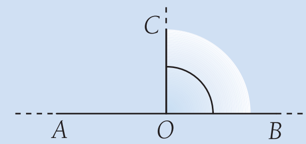
FIGURE

Angoli notevoli

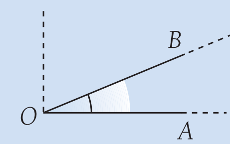
Angolo piatto
Angolo i cui lati sono semirette opposte rispetto al vertice O.



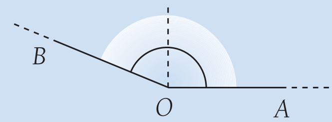
Angolo retto
Angolo corrispondente alla metà di un angolo piatto.



Angolo acuto
Angolo minore di un angolo retto.



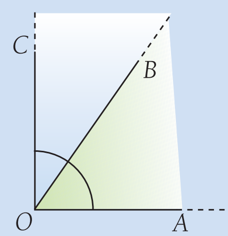
Angolo ottuso
Angolo maggiore di un angolo retto, ma minore di un angolo piatto.



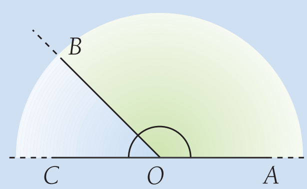
Angolo giro
Angolo costituito da tutti i punti del piano e i cui lati coincidono.

Coppie di angoli particolari

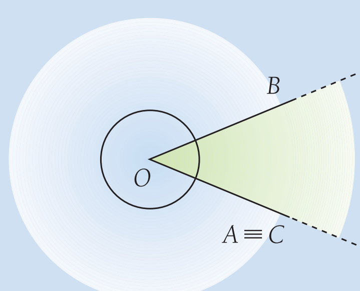
Angoli complementari
Due angoli la cui somma è un angolo retto.



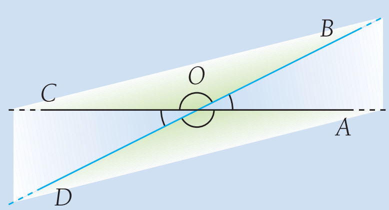
Angoli supplementari
Due angoli la cui somma è un angolo piatto.



Angoli esplementari
Due angoli la cui somma è un angolo giro.

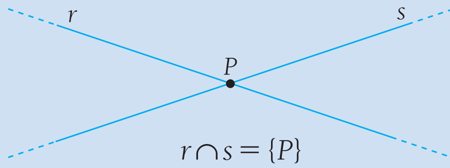


Angoli opposti al vertice
Due angoli sono opposti al vertice quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.
Angoli opposti al vertice sono congruenti.



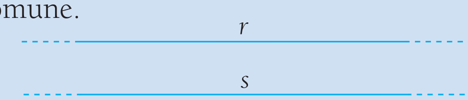
Posizioni reciproche di due rette nel piano

Rette incidenti
Sono incidenti due rette che si incontrano in un solo punto.



$$r \cap s = \{P\}$$

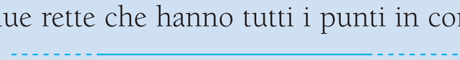
Rette parallele
Sono parallele due rette che appartengono allo stesso piano e che non hanno alcun punto in comune.



$$r // s$$

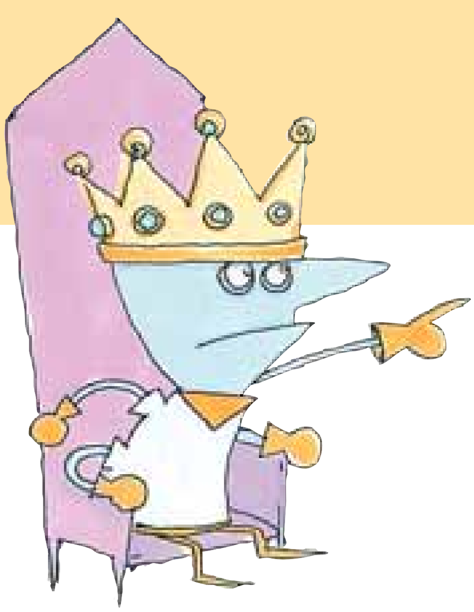
$$r \cap s = \varnothing$$

Rette coincidenti
Sono coincidenti due rette che hanno tutti i punti in comune.

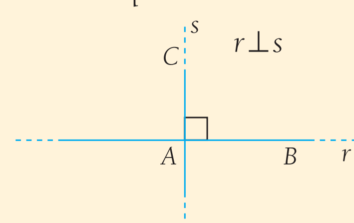


$$r \equiv s$$

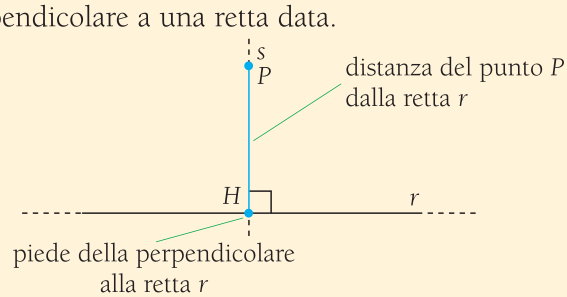
$$r \cap s = r = s$$



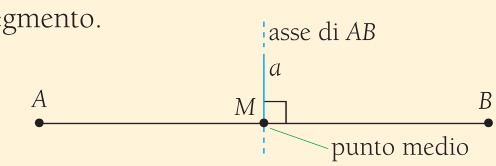
Rette perpendicolari
Due rette **incidenti** sono **perpendicolari** quando dividono il piano in quattro angoli congruenti e dunque retti.



Per un punto passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.

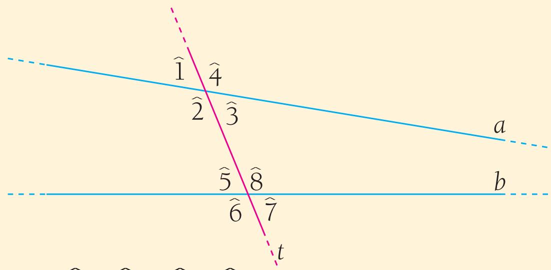


La retta perpendicolare a un segmento e passante per il suo punto medio è l'**asse** di quel segmento.



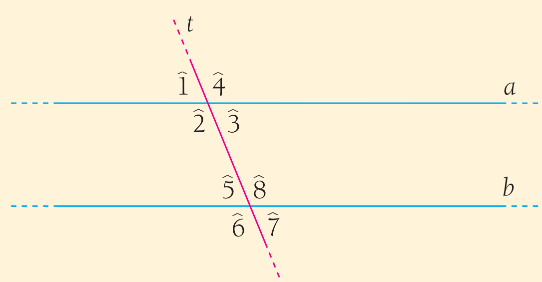
Rette incidenti tagliate da una trasversale

La trasversale t forma con le rette a e b 8 angoli:



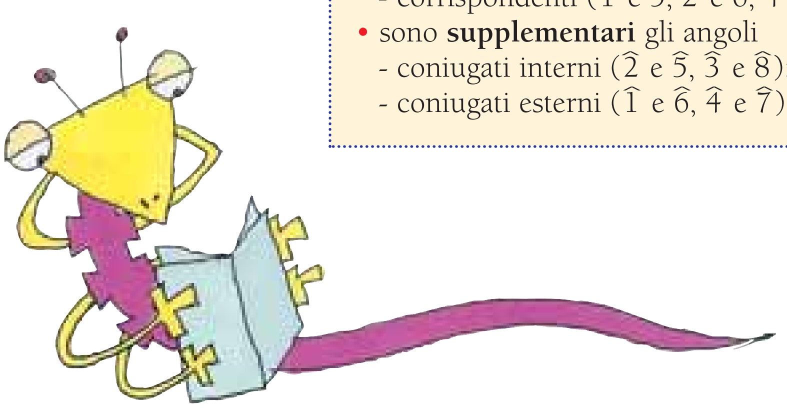
alterni interni:	$\hat{2}$ e $\hat{8}$	$\hat{3}$ e $\hat{5}$		
alterni esterni:	$\hat{4}$ e $\hat{6}$	$\hat{1}$ e $\hat{7}$		
corrispondenti:	$\hat{1}$ e $\hat{5}$	$\hat{2}$ e $\hat{6}$	$\hat{4}$ e $\hat{8}$	$\hat{3}$ e $\hat{7}$
coniugati interni:	$\hat{2}$ e $\hat{5}$	$\hat{3}$ e $\hat{8}$		
coniugati esterni:	$\hat{1}$ e $\hat{6}$	$\hat{4}$ e $\hat{7}$		

Rette parallele tagliate da una trasversale



Se le rette a e b sono **parallele** ($a // b$):

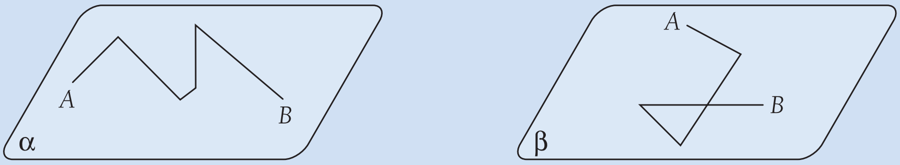
- sono **congruenti** tra loro gli angoli
  - alterni interni ($\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$);
  - alterni esterni ($\hat{4}$ e $\hat{6}$, $\hat{1}$ e $\hat{7}$);
  - corrispondenti ($\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$);
- sono **supplementari** gli angoli
  - coniugati interni ($\hat{2}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{8}$);
  - coniugati esterni ($\hat{1}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{7}$).



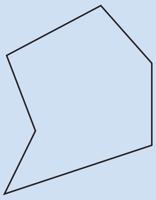
MAPPA 4

Poligonali e poligoni

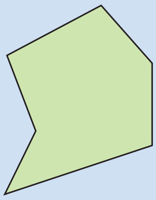
Segmenti consecutivi non adiacenti formano una **spezzata**.



Una spezzata non intrecciata i cui estremi coincidono si dice **poligonale**.

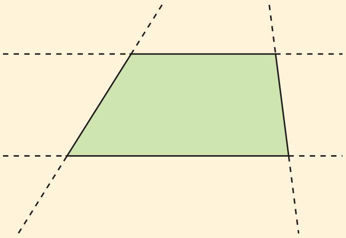


Un **poligono** è la parte di piano delimitata da una poligonale.



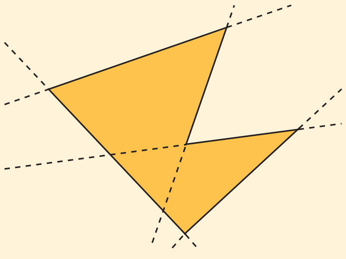
Poligono convesso

Poligono che non contiene il prolungamento dei suoi lati.

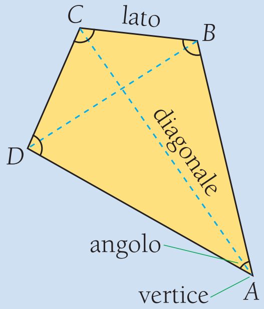


Poligono concavo

Poligono che contiene alcuni prolungamenti dei suoi lati.



Elementi di un poligono

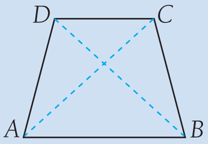


In un poligono il numero n dei vertici e degli angoli è uguale al numero dei lati.

Il numero d delle diagonali di un poligono è dato dalla relazione:

$\boldsymbol{d = n \times (n - 3) : 2}$

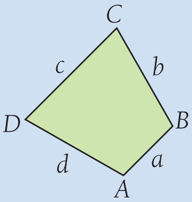
Esempio:
quadrilatero (4 lati)
$d = 4 \times (4 - 3) : 2 =$
$= 4 \times 1 : 2 = 2$



Perimetro di un poligono

Il perimetro $2p$ di un poligono è la somma delle misure delle lunghezze dei suoi lati. La metà del perimetro p si chiama **semiperimetro**.

$$2p = a + b + c + d$$



Proprietà dei poligoni

Le proprietà dei poligoni si riferiscono agli angoli e ai lati.

Somma degli angoli interni

La somma degli angoli interni di un poligono è data dalla relazione:

$S_i = 180° \times (n - 2)$

n° dei lati del poligono

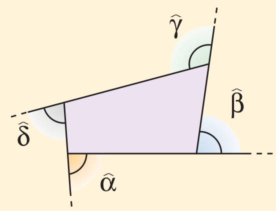
Esempio:
esagono (6 lati)

$S_i = 180° \times (6 - 2) = 720°$

Somma degli angoli esterni

La somma degli angoli esterni di un poligono è un **angolo giro**.

$S_e = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = 360°$

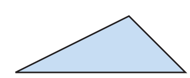
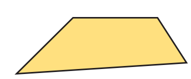
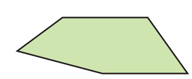
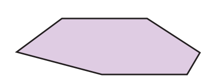


Relazioni tra i lati

In un poligono ciascun lato è minore della somma di tutti gli altri lati.

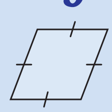
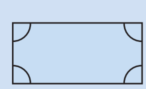
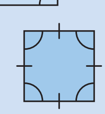
Classificazione dei poligoni

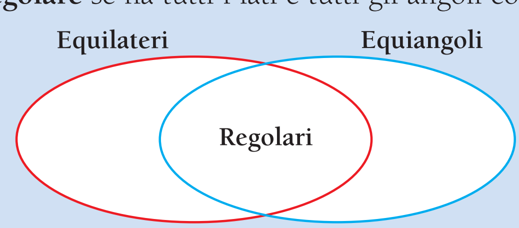
I poligoni vengono classificati in base al numero dei loro lati (o dei vertici o degli angoli).

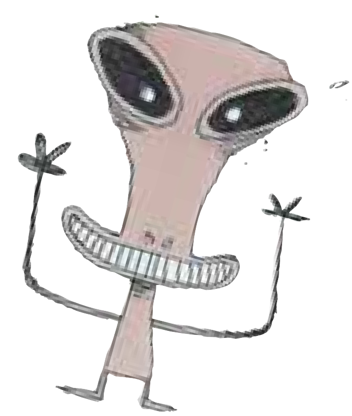
Numero lati	Nome poligono	Esempio
3	triangolo o trilatero	
4	quadrangolo o quadrilatero	
5	pentagono	
6	esagono	

Poligoni equilateri, equiangoli e regolari

Un poligono si dice:

- **equilatero** se ha tutti i lati congruenti; 
- **equiangolo** se ha tutti gli angoli congruenti; 
- **regolare** se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti. 



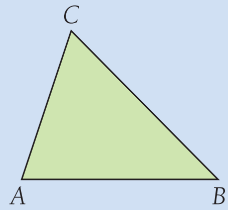


FIGURE

MAPPA 5

Elementi fondamentali di un triangolo

Un triangolo è un poligono con:
- 3 **lati**;
- 3 **angoli**;
- 3 **vertici**.



Lati e angoli opposti

AB è opposto a $\widehat{C}$
BC è opposto a $\widehat{A}$
CA è opposto a $\widehat{B}$

Lati e angoli adiacenti

AB è adiacente a $\widehat{A}$ e a $\widehat{B}$
BC è adiacente a $\widehat{B}$ e a $\widehat{C}$
CA è adiacente a $\widehat{C}$ e a $\widehat{A}$

Proprietà dei triangoli

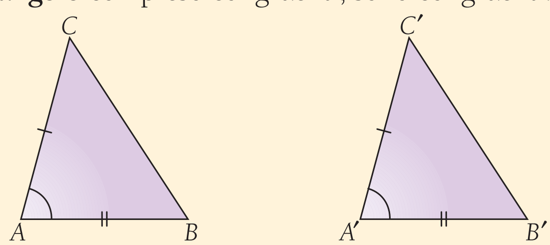
Le proprietà dei triangoli si deducono da quelle dei poligoni:
- la **somma degli angoli interni** di un triangolo è un angolo piatto (180°);
- in un triangolo ciascun **lato** è minore della somma degli altri due lati e maggiore della loro differenza.

Criteri di congruenza dei triangoli

Per stabilire se due triangoli sono congruenti si fa riferimento ai **tre criteri di congruenza** dei triangoli.

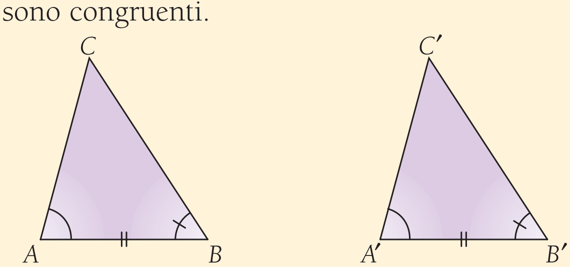
Primo criterio di congruenza dei triangoli

Due triangoli che hanno **due lati** corrispondenti e l'**angolo** compreso congruenti, sono congruenti.



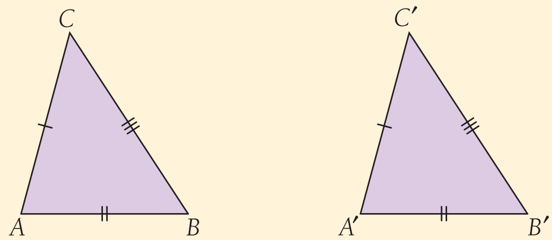
Secondo criterio di congruenza dei triangoli

Due triangoli che hanno **un lato** e i **due angoli** corrispondenti a esso adiacenti congruenti, sono congruenti.



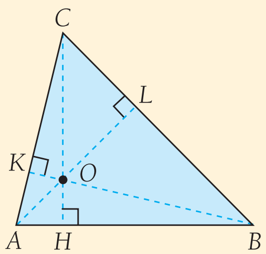
Terzo criterio di congruenza dei triangoli

Due triangoli che hanno **i lati** corrispondenti congruenti, sono congruenti.



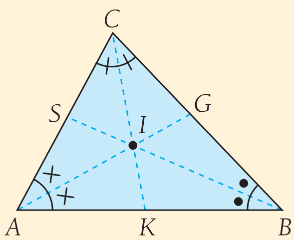
Segmenti e punti notevoli

Altezza
Segmento di perpendicolare condotto da un vertice alla retta cui appartiene il lato opposto.



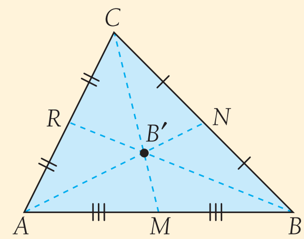
Ortocentro
Le tre altezze di un triangolo (o i loro prolungamenti) si incontrano in un punto detto ortocentro.

Bisettrice
Segmento di bisettrice compreso tra un vertice e il lato opposto.



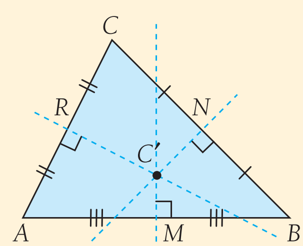
Incentro
Le tre bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto detto incentro.

Mediana
Segmento che congiunge il punto medio di un lato con il vertice opposto.

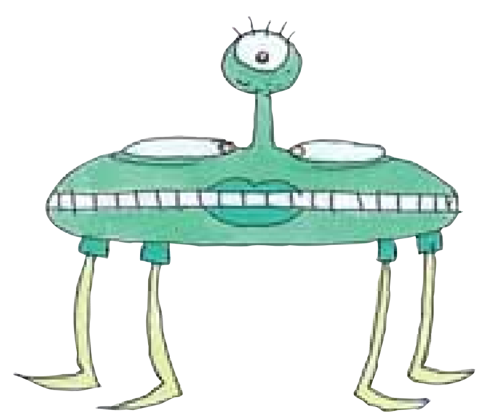


Baricentro
Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto detto baricentro.

Asse
Retta perpendicolare a un lato nel suo punto medio.



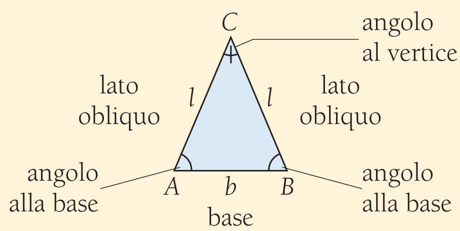
Circocentro
I tre assi di un triangolo si incontrano in un punto detto circocentro.



Classificazione dei triangoli rispetto ai lati

Isoscele
Ha due lati congruenti tra loro:

$BC = CA$

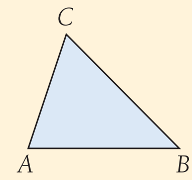


Perimetro
$2p = l \times 2 + b$

Relazione tra gli angoli alla base
Gli angoli alla base sono **congruenti** ($\widehat{A} = \widehat{B}$).

Scaleno
Ha tutti i lati non congruenti tra loro:

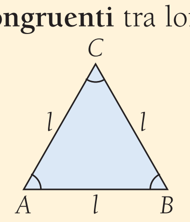
$AB \neq BC \neq CA$



Relazione tra gli angoli
Ha tutti gli angoli non congruenti tra loro ($\widehat{A} \neq \widehat{B} \neq \widehat{C}$).

Equilatero
Ha **tutti i lati congruenti** tra loro:

$AB = BC = CA$



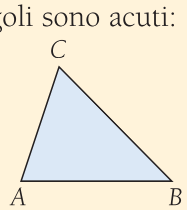
Perimetro
$2p = l \times 3$

Relazione tra gli angoli
Gli angoli sono congruenti ($\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$).

Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

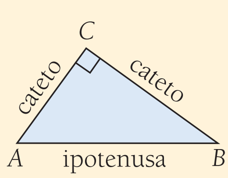
Acutangolo
I tre angoli sono acuti:

$\widehat{A} < 90°$
$\widehat{B} < 90°$
$\widehat{C} < 90°$



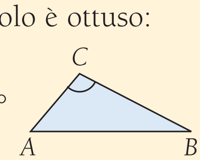
Rettangolo
Un angolo è retto:

$\widehat{C} = 90°$
$\widehat{A} + \widehat{B} = 90°$



Ottusangolo
Un angolo è ottuso:

$\widehat{C} > 90°$

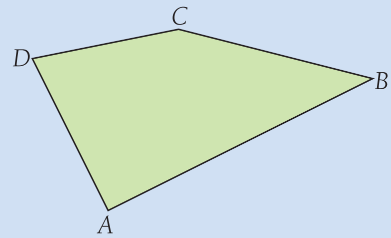


MAPPA 6

Elementi fondamentali di un quadrilatero

Un quadrilatero è un poligono con:

- 4 **lati**;
- 4 **angoli**;
- 4 **vertici**.



Lati opposti
Sono opposti due lati **non consecutivi**:
AB è opposto a CD
AD è opposto a CB

Angoli opposti
Sono opposti due angoli **non adiacenti allo stesso lato**:
$\widehat{A}$ è opposto a $\widehat{C}$
$\widehat{B}$ è opposto a $\widehat{D}$

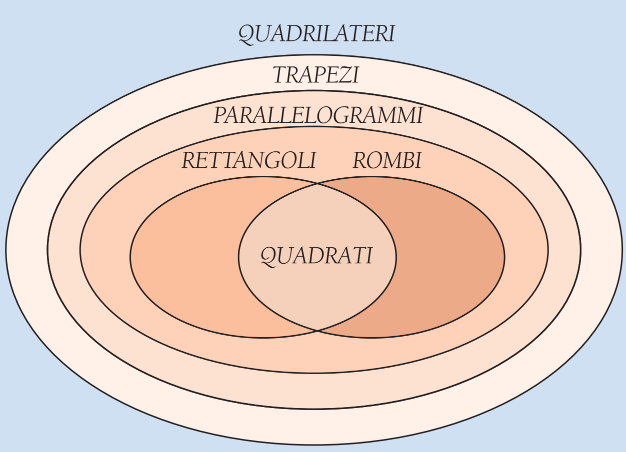
Vertici opposti
Sono opposti due vertici **non consecutivi**:
A è opposto a C
B è opposto a D

Proprietà dei quadrilateri

Le proprietà dei quadrilateri si deducono da quelle dei poligoni:

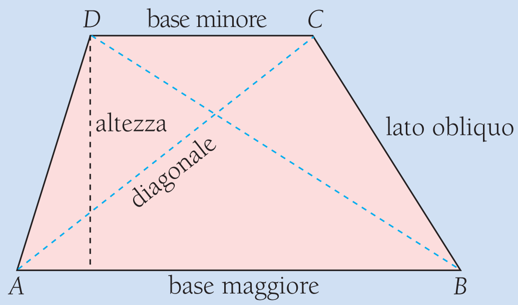
- la **somma degli angoli interni** di un quadrilatero qualsiasi è un angolo giro (360°);
- un quadrilatero ha due **diagonali**.

L'insieme dei quadrilateri



Trapezi

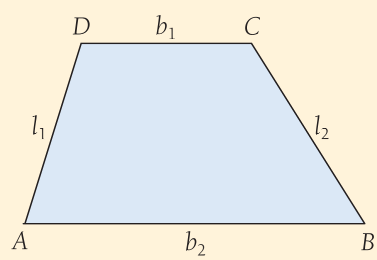
Si dice trapezio ogni quadrilatero che ha due lati opposti **paralleli**.



Gli angoli adiacenti allo stesso lato obliquo sono **supplementari**:
$\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ $\qquad \widehat{A} + \widehat{D} = 180°$

Trapezio scaleno

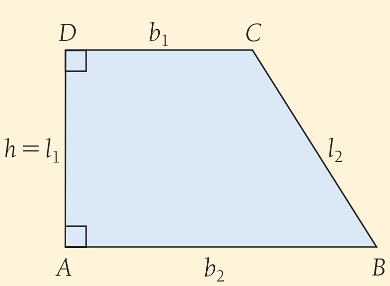
I lati obliqui non sono congruenti: $AD \neq BC$.



Perimetro
$2p = b_1 + b_2 + l_1 + l_2$

Trapezio rettangolo

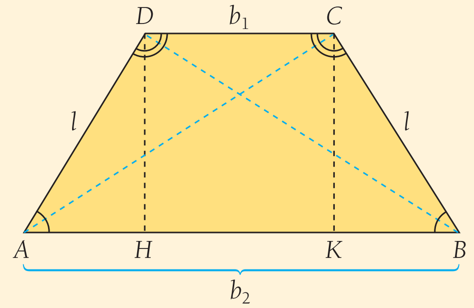
Ha un lato **perpendicolare** alla base:
$AD \perp AB \qquad \widehat{A} = \widehat{D} = 90°$



Perimetro
$2p = b_1 + b_2 + h + l_2$

Trapezio isoscele

I **lati obliqui** sono **congruenti**:
$AD = BC$

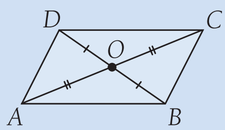


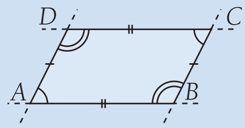
$\widehat{A} = \widehat{B}$ e $\widehat{C} = \widehat{D}$
$AC = BD$
$AH = KB$

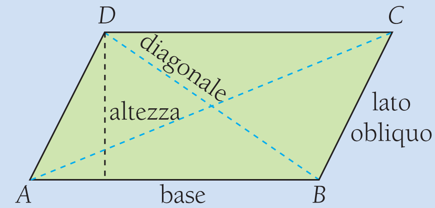
Perimetro
$2p = b_1 + b_2 + 2 \times l$

Parallelogrammi

Si dice parallelogramma ogni quadrilatero che ha i **lati opposti paralleli**.





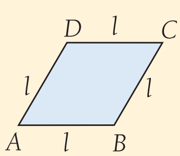


- Ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti.
- Il punto di intersezione delle diagonali divide ognuna di esse in due parti congruenti.
  $AO = OC$ e $BO = OD$
- I lati opposti sono congruenti.
  $AB = CD$ e $AD = BC$
- Gli angoli opposti sono congruenti.
  $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$

Parallelogrammi particolari

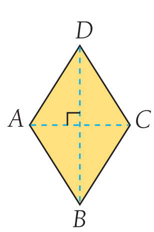
Rombo

Parallelogramma con i quattro **lati congruenti**.



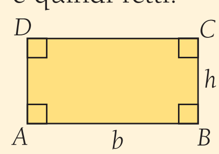
Perimetro
$2p = l \times 4$

Diagonali
Le diagonali di un rombo sono **perpendicolari** tra loro:
$AC \perp DB$
Ogni parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.



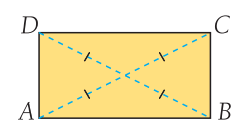
Rettangolo

Parallelogramma con tutti gli **angoli congruenti** e quindi retti.



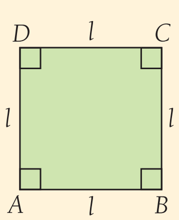
Perimetro
$2p = (b + h) \times 2$

Diagonali
Le diagonali di un rettangolo sono **congruenti**:
$AC = DB$
Ogni parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo.

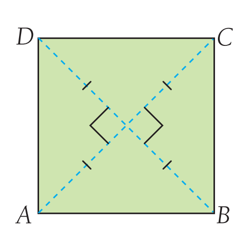


Quadrato

Parallelogramma con i **lati** e gli **angoli congruenti** (è quindi un poligono regolare).



Diagonali
Le diagonali di un quadrato sono **congruenti** e **perpendicolari** tra loro:
$AC = BD$ e $AC \perp BD$
Ogni parallelogramma con le diagonali congruenti e perpendicolari è un quadrato.



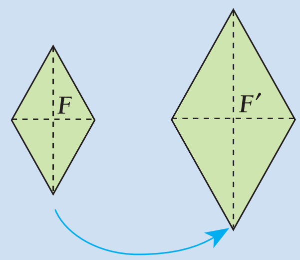
Perimetro
$2p = l \times 4$

MAPPA 7

Traslazioni, rotazioni, simmetrie

Trasformazioni geometriche

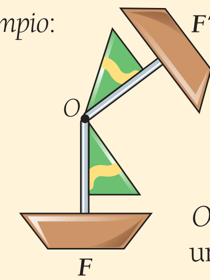
Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano, cioè a ogni punto di una figura ***F*** corrisponde uno e un solo punto della figura ***F′***, ottenuta applicando a ***F*** la trasformazione geometrica.



Punti uniti

Un punto che corrisponde a se stesso in una trasformazione geometrica è detto **punto unito**.

Esempio:



O è il punto unito.

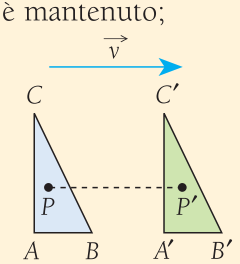
Isometrie

Una **isometria** è una trasformazione geometrica che mantiene invariate la **forma** e le **dimensioni** delle figure.

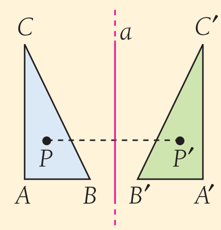
Isometrie dirette e inverse

Le isometrie si dividono in due gruppi:

- le **isometrie dirette**, in cui il verso di percorrenza dei vertici della figura trasformata è mantenuto;

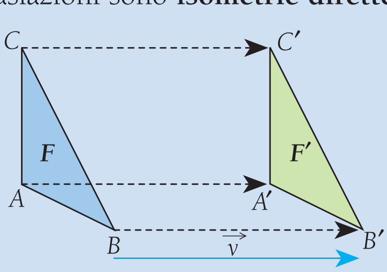


- le **isometrie inverse**, in cui il verso di percorrenza dei vertici della figura trasformata non è mantenuto.



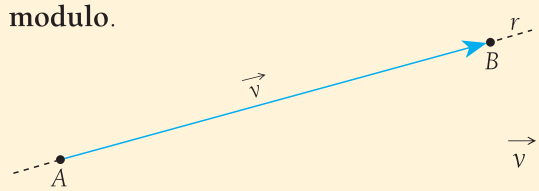
Traslazioni

- Una traslazione è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano individuata da un **vettore** che ne esprime la lunghezza, la direzione e il verso.
- Una traslazione si indica con **T**.
- Le traslazioni sono **isometrie dirette**.



Vettore

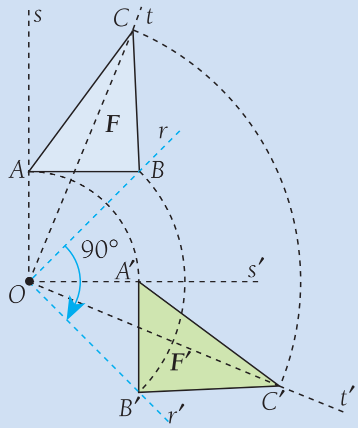
Ogni vettore è rappresentato da un segmento dotato di **lunghezza**, **direzione** e **verso**.
La misura della lunghezza di un vettore è detta **modulo**.



$\vec{v} = \vec{AB}$

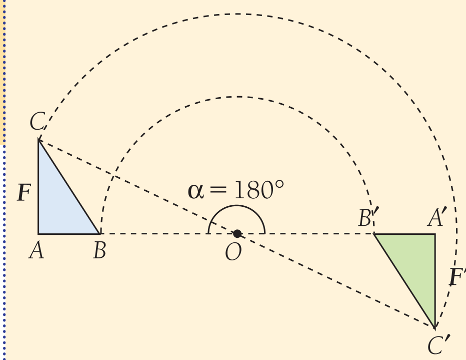
Rotazioni

- Una rotazione è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano individuata da un **centro di rotazione**, da un'**ampiezza** e da un **verso**.
- Una rotazione di centro O si indica con R_O.
- Le rotazioni sono **isometrie dirette**.



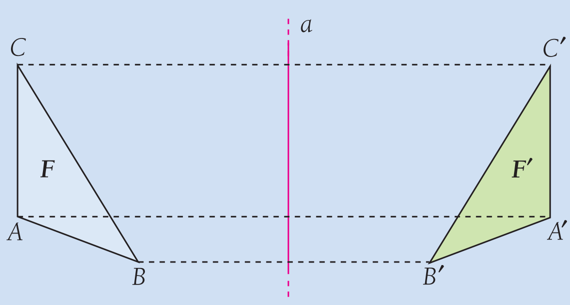
Rotazioni particolari: le simmetrie centrali

Una simmetria centrale è una rotazione di centro O e ampiezza di 180°. Si indica con S_O.



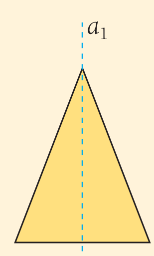
Simmetrie assiali

- Una simmetria assiale è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano individuata da una retta detta **asse di simmetria**.
- Si ottiene attraverso un movimento di ribaltamento nello spazio e si indica con S_a.
- Le simmetrie assiali sono **isometrie inverse**.



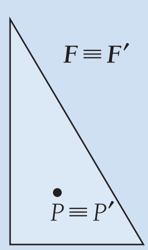
Simmetria assiale nelle figure geometriche

Una figura è dotata di asse di simmetria se esiste una retta che la divide in due parti congruenti simmetriche l'una rispetto all'altra.



Identità

- Una identità è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano se stesso.
- Le identità sono **isometrie dirette**.



Punti uniti di una identità

In una identità tutti i punti sono punti uniti.

FIGURE